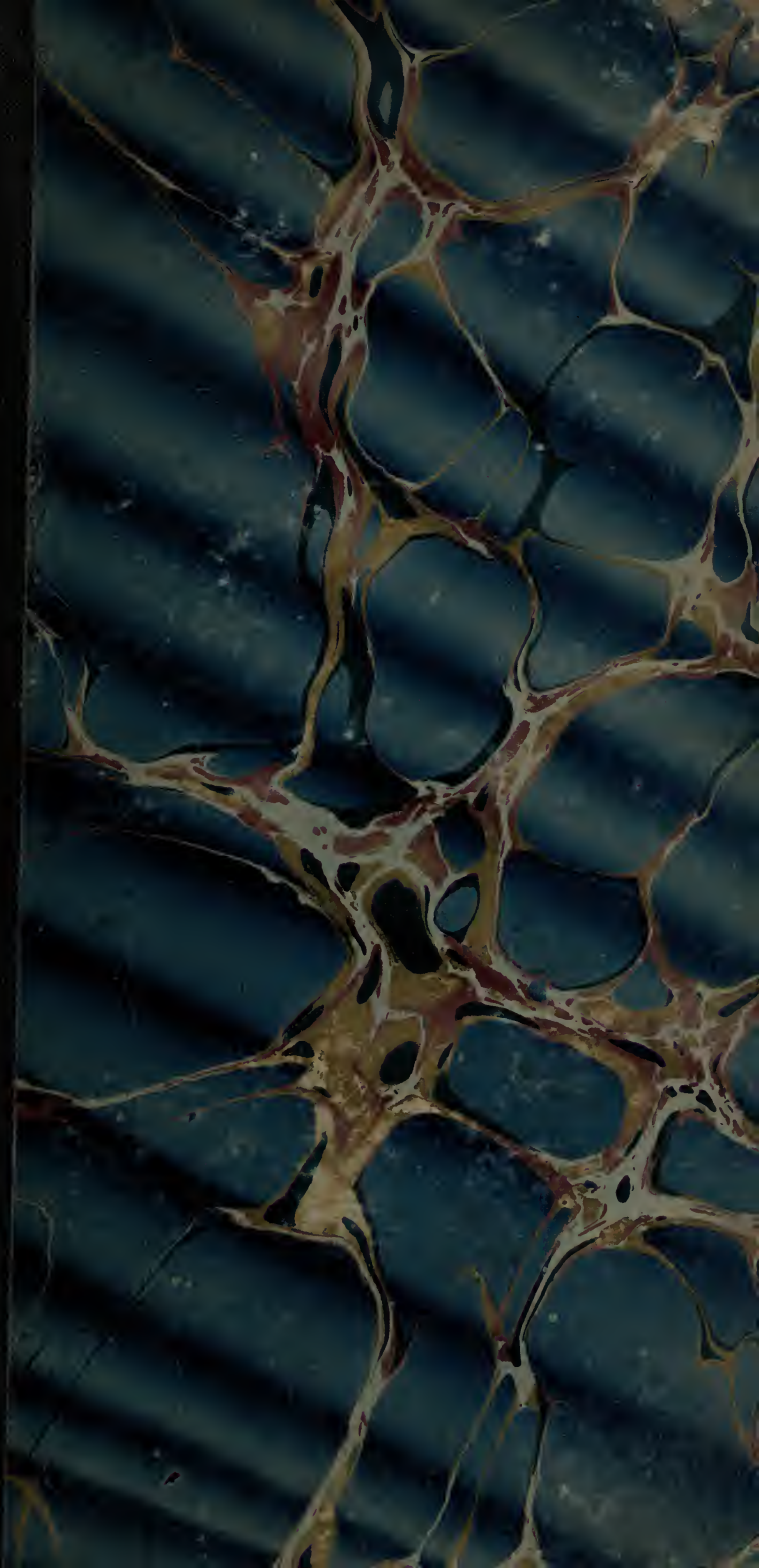

529

THE LIBRARY

UNIVERSITY OF
WESTERN ONTARIO

THE J. D. BARNETT
TEXT-BOOK COLLECTION

University of Western Ontario
LIBRARY
LONDON - CANADA

Class LT1001
517 T76 1848

Western University
The gift of J. D. Campbell, Ottawa . . 1902

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DE

CALCUL DIFFERENTIEL

ET DE

CALCUL INTEGRAL.

" On ne saurait énumérer tout ce que ce genre
" de calcul a fait faire de découvertes dans
" l'analyse mathématique et dans la philosophie
" naturelle. Il n'est presque pas une question
" un peu élevée de mathématiques pures ou
" appliquées qui n'en dépende, et qui puisse être
" résolue sans lui." BIOT.

QUÉBEC.

IMPRIMERIE D'AUG. CÔTÉ ET CIE.

1848.

T188

Ce traité, comme le titre l'indique, est purement élémentaire : il est destiné à suppléer d'autres ouvrages plus volumineux et trop difficiles pour la plupart de ceux qui commencent à se livrer à cette étude. De nombreuses applications y ont été substituées à plusieurs théories compliquées, que renferment ordinairement des traités plus étendus. Joindre autant que possible la clarté à la précision, telle est l'intention qui a présidé à la rédaction de ce petit ouvrage.

Québec, janvier, 1848.

AVANT-PROPOS.

Les travaux de Viète et de Descartes, qui avaient déjà fait faire d'immenses progrès aux Mathématiques, avaient préparé la voie aux grandes découvertes de Newton et de Leibniz. D'autres, tels que Cavaliéri, Fermat, Roberval, Barrow, Wallis, etc., y avaient aussi puissamment contribué. C'est vers 1665 que Newton inventa la *méthode des Fluxions*. Il la communiqua à plusieurs autres mathématiciens, mais sans la leur découvrir d'une manière explicite. Dans une de ses lettres, qui fut transmise à Leibniz, cette méthode était exposée sous la forme de l'anagramme suivante :

6a cc d æ 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x. La phrase cachée sous cette énigme était celle-ci : " *Datâ æquatione, quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versâ.*"— Ce ne fut qu'en 1704 que Newton exposa formellement sa méthode dans un ouvrage sur la *Quadrature des Courbes.*

Leibniz, de son côté, publia son premier écrit sur le *Calcul différentiel* en 1684, dans les *Actes de Leipzig* (1.)

Vers 1691, les Bernouilli commençèrent aussi à s'occuper de ce sujet, et en 1696 le marquis de l'Hôpital publia le premier traité sur cette branche des mathématiques. Ils suivaient en tout la méthode de Leibniz.

Depuis, plusieurs autres méthodes ont été imaginées : les plus remarquables sont celle des *Fractions évanouissantes* de Landen, celle des *Limites* de D'Alembert, et celle de *Dérivation* de Lagrange, exposée par lui-même dans sa *Théorie des fonctions analytiques.*

Ces diverses méthodes conduisent toutes aux mêmes résultats ; elles les expriment à peu près de la même manière. La différence, qui existe entre elles, est plutôt métaphysique que mathématique. Il est donc indifférent quelle est celle que l'élève étudie d'abord, pourvu qu'il ait ensuite le soin de les comparer ensemble.

---

(1) Leibniz ayant été accusé d'avoir emprunté sa méthode à Newton, en appela, en 1711, à la Société Royale de Londres, qui, après un long examen de la question, décida que Newton était le premier inventeur. La postérité plus impartiale a regardé ces deux illustres mathématiciens comme les inventeurs, indépendants l'un de l'autre, des méthodes qui portent leurs noms.

" Quelle que soit celle qu'il choisisse, disent les rédacteurs distingués d'une Encyclopédie publiée récemment à Londres (2), nous croyons que l'élève devrait s'accoutumer à traduire chaque résultat dans le langage du calcul infinitésimal, et à le démontrer par la même méthode. Car dès que l'on aura bien saisi les principes de ce calcul, on comprendra et l'on retiendra beaucoup plus aisément tout ce qui s'ensuit, et l'on en fera bien plus facilement l'application, que par aucune des autres méthodes. "

" On ne saurait énumérer, dit Biot en parlant du Calcul différentiel, tout ce que ce genre de calcul a fait faire de découvertes dans l'analyse mathématique et dans la philosophie naturelle : il nous suffira ici de dire qu'il n'est presque pas une question un peu élevée de mathématiques pures ou appliquées qui n'en dépende, et qui puisse être résolue sans lui. "

---

(2) *The Penny Cyclopædia* of the Society for the diffusion of useful knowledge : *Article*, DIFFERENTIAL CALCULUS.

CALCUL DIFFERENTIEL.

CHAPITRE I.

PRINCIPES.

ARTICLE PREMIER.—DÉFINITIONS.

1. Les quantités *variables* sont celles dont la valeur change ou peut changer *dans le cours d'une même opération* ; les *constantes* sont celles dont la valeur est fixe. Les constantes se désignent par les premières lettres de l'alphabet, et les variables par les dernières. Ainsi dans l'équation du cercle, $y^2 = 2ax - x^2$, l'ordonnée y et l'abscisse x sont des variables ; a, le rayon, est une constante.

2. La *différentielle* d'une variable est la différence entre la valeur primitive de cette variable, et sa valeur après qu'elle a reçu une altération infiniment petite : c'est-à-dire que la *différentielle* d'une variable est une quantité infiniment petite dont cette variable a été augmentée ou diminuée.

3. Le *Calcul différentiel* est l'art de trouver les différentielles des variables, et les rapports qui peuvent exister entre ces différentielles.

4. Newton appelle *Calcul des fluxions*, ce que Leibniz appelle *Calcul différentiel*, parce qu'il considère l'accroissement, que reçoit une quantité, comme produit par mouvement. Il désigne la fluxion de x, par un point placé au-dessus de cette lettre ; ainsi, $\dot{x}$.

Leibniz désigne la différentielle de x, par la minuscule d (*) placée devant cette quantité ; ainsi, $d\,x$.

5. Lorsqu'on veut indiquer la différentielle de plusieurs termes, on doit les mettre entre parenthèses ; par exemple : $d\,(x + y)$.

Quand la lettre d est suivie d'un point, elle affecte alors tout ce qui la suit *immédiatement* : ainsi la différentielle de uv est $d.\,uv$; celle de x^n, ... $d.\,x^n$ ou $d\,(x^n)$.

6. Les constantes n'ont évidemment pas de différentielles, d'après leur définition même. Ainsi la différentielle de $x + a$ est la même que celle de x, c'est-à-dire dx.

7. De même que la variable x a une différentielle dx, ainsi cette différentielle première a-t-elle

---

[*] d, première lettre de ce mot *différentielle*.

aussi à son tour une différientielle d^2x, qu'on appelle *différentielle seconde ;* et celle-ci, une différentielle d^3x, qu'on nomme *différentielle troisième*, et ainsi de suite.—Newton désigne ces quantités comme suit :

$$\ddot{x},\ \dot{\dot{x}},\ \dot{\dot{\dot{x}}},\ \&c.$$

Il ne faut pas confondre ces trois expressions... dx^2.... $d.\,x^2$.... d^2x.. La première est le carré de la différentielle de x ; la seconde est la différentielle du carré de x ; et la troisième, la différentielle seconde de x.

8. On appelle *fonction* d'une variable, une expression qui contient cette variable d'une manière quelconque.

Ainsi $ax^2 + bx$, log. ax, $\sqrt{2ax-x^2}$, &c. sont autant de fonctions de x.

Quand on parle *en général* d'une fonction de x, on l'indique de cette manière : $f(x)$, $F(x)$, $f(x)$.

ARTICLE DEUXIÈME.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

RÈGLE POUR DIFFÉRENTIER UNE QUANTITÉ SIMPLE.

9. On place la lettre minuscule d devant cette quantité.

RÈGLE GÉNÉRALE POUR DIFFÉRENTIER UNE QUANTITÉ COMPOSÉE.

10. Soit cette quantité t. On ajoute à chaque variable sa propre différentielle. Alors soit la quantité t devenue par là T. On prend la différence $T-t$, qui est évidemment la différentielle cherchée.

Exemple. Soit proposé de différentier $(a+x)^2$. Ici $t=(a+x)^2=a^2+2\,ax+x^2$.

$T=(a+x+dx)^2=a^2+2\,ax+x^2+2\,adx+2\,xdx+dx^2$.

Donc $T-t=2\,adx+2\,xdx+dx^2$.

Mais dx^2 étant le carré d'une différentielle dx, est infiniment plus petit que dx, et peut par conséquent se négliger sans erreur sensible. Donc le différentielle cherchée est $(2\,a+2\,x)\;dx$.

11. RÈGLE POUR DIFFÉRENTIER UNE QUANTITÉ DANS LAQUELLE LES VARIABLES NE PASSENT PAS LE 1er. DEGRÉ.—*On efface les termes constants, et on substitue aux variables leurs propres différentielles.*

En effet, soit à différentier l'équation
$b+x=ay-c$.

D'après la règle générale (10), (t) ... $b+x=ay-c$ .... Donc (T) ... $b+x+dx=ay+ady-c$ ... Donc $(T-t)$... $dx=ady$ ... Ce qui revient à effacer les constantes b et $-c$, et à remplacer x et y par dx et dy; c. q. f. d.

Exemples. 1°. ... $d\left(bx + cy - a + \frac{m}{n}z + f\right)$ $= bdx + cdy + \frac{m}{n}dz.$

2°. ... $d(b - x) = - dx.$

12. Règle pour différentier un produit. — *On multiplie successivement la différentielle de chaque facteur, par le produit de tous les autres facteurs, et l'on prend la somme de tous ces produits.*

En effet, soit à différentier le produit xy. D'après la règle générale (10), ... $(t) =$ ... xy ... $(T) = (x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dxdy$. Donc $(T - t) = xdy + ydx$ ... (en négligeant $dxdy$, infiniment petit du second ordre) : c. q. f. d.

Exemples. 1°. .... $d(ax) = xda + adx = 0 + adx$ $= adx$, puisque a, étant une constante, n'a point de différentielle. Donc, quand l'un des facteurs est constant, on peut le regarder comme un coefficient fixe, sans en prendre la différentielle.

2°. .... $d(xyz) = yzdx + xzdy + xydz.$

3°. .... $\frac{d.xy}{xy} = \frac{ydx + xdy}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$

13. Règle pour différentier une puissance. — *On multiplie la fonction donnée par son exposant ; on diminue ensuite cet exposant d'une unité, et l'on multiplie enfin le résultat par la différentielle de la racine.*

En effet, soit à différentier x^m ... Alors $(t) = \ldots x^m$: et ... $(T) = (x + dx)^m = x^m + m\,x^{m-1}\,dx + \frac{m\,(m-1)}{2} x^{m-2}\,dx^2 +$ &c.... Donc $(T - t) = m\,x^{m-1}\,dx + \frac{m\,(m-1)}{2} x^{m-2}\,dx^2 +$ &c. Mais le dernier terme s'évanouit, à cause de dx^2 qu'il renferme ; et il en serait de même de tous les suivants, qui contiendraient dx^3, dx^4, &c. Donc $d\,(x^m) = m x^{m-1}\,dx$ ... c. q. f. d.

Exemples. 1°. ... $d\,x^{12} = 12\,x^{11}\,dx$.

2°. .... $d\,(a + x)^4 = 4\,(a + x)^3\,dx =$ &c. en développant.

3°. .... $d\,\sqrt[n]{x} = d.\,x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\,x^{\frac{1-n}{n}}\,dx$....

4°. .... $d\,\sqrt[p]{x^n} = d.\,x^{\frac{n}{p}} = \frac{n}{p}\,x^{\frac{n}{p}-1}\,dx$.

14. Règle pour différentier un radical du 2nd. degré.—Comme on a souvent besoin, dit Lacroix, (*) de différentier des radicaux du second degré, on a formé, pour ces fonetions, une règle à part ; la voici :—*On divise la différentielle de la quantité sous le signe, par le double du radical.*

(*) Traité élémentaire de Calcul différentiel, par S. F. Lacroix, 5e. Ed. p. 18.

En effet, soit proposé de différentier $\sqrt{u}$. D'après la règle précédente (13), ... $d.\sqrt{u} = d.u^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ Donc &c.

15. Règle pour différentier une fraction. —*On prend le produit du dénominateur par la différentielle du numérateur, moins le produit du numérateur par la différentielle du dénominateur, et on divise le tout par le carré du dénominateur.*

En effet soit à différentier la fraction $\frac{x}{y}$...

$$d\frac{x}{y} = d.xy^{-1} = y^{-1}dx + xd.y^{-1} = y^{-1}dx - xy^{-2}dy =$$

$$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2} = \text{(en réduisant au même dénominateur)}$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2}; \text{ c. q. f. d.}$$

Exemples. 1°. $d\frac{a+x}{y} =$

$$\frac{y \times d(a+x) - (a+x)\,dy}{y^2} = \frac{ydx - ady - xdy.}{y^2}$$

2°. ... $d.\frac{ax+y}{b-z} = \frac{(b-z)\,(adx+dy) - (ax+y)}{(b-z)^2}$

$$\frac{(-dz)}{} = \frac{abdx + bdy - azdx - zdy + axdz + ydz}{b^2 - 2bz + z^2}.$$

3° ... $d\frac{a}{x}$ .. Ici le numérateur étant constant, le premier terme du numérateur de la différentielle se réduit à 0 ; par conséquent .. $d\frac{a}{x} = -\frac{adx}{x^2}$.

ARTICLE TROISIÈME.

APPLICATIONS DES RÈGLES PRÉCÉDENTES.

16. Problème 1er. Différentier $a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}$.

Solution.— ... $d\left(a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}\right) = \frac{bdx}{2\sqrt{x}} - \frac{cdx}{x^2}$,

puisque le terme constant a n'a pas de différentielle. Le 2d. terme se différentie par la règle du n°. 14, et le troisième par celle du n°. 15.

Problème 2nd. Différentier $\sqrt{a + bx + cx^2}$.

Solution.—Cette quantité étant un radical du second degré, on aura (14) ... $d\sqrt{a + bx + cx^2} =$

$$\frac{d\,(a + bx + cx^2)}{2\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{bdx + 2\,cxdx}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Le second terme du numérateur se trouve par la règle du n°. 13.

PROBLÈME 3e. Différentier $\frac{1}{\sqrt{a + x}}$.

Solution.—On fait passer le radical au numérateur et l'on différentie alors par la règle du n°. 13. On a donc

$$d.\ \frac{1}{\sqrt{a + x}} = d.\ (a + x)^{-\frac{1}{2}} = -\tfrac{1}{2}\,(a + x)^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$-\frac{dx}{2\,(a + x)^{\frac{3}{2}}}.$$

PROBLÈME 4e. Différentier $x^m\,y^n$.

Solution.—Suivant les règles des n°s. 12 et 13, on a $d.\ x^m\,y^n = mx^{m-1}\,y^n dx + nx^m\,y^{n-1}\,dy$.

PROBLÈME 5e. Différentier $a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}$.

Solution.—On fait passer au numérateur les différents dénominateurs, et l'on a alors

$$d\left(a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x}} + \frac{e}{x^2}\right) = d\,(a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}}$$

$+ \quad ex^{-2}) \quad = - \frac{2}{3} bx^{-\frac{5}{3}} \quad dx \quad + \frac{1}{3} cx^{-\frac{7}{3}} \quad dx \quad -$

$2 \; ex^{-3} dx = - \frac{2 \; bdx}{3 \; x^{\frac{7}{3}}} + \frac{4 \; cdx}{3 \; x^{\frac{7}{3}}} - \frac{2 \; edx}{x^3} = - \frac{2 \; bdx}{3 \; x \; \sqrt[3]{x^2}} +$

$\frac{4 \; cdx}{3 \; x^2 \sqrt{x}} - \frac{2 \; edx}{x^3}.$

Problème 6e. Différentier $(a + bx^m)^n$.

Solution. — D'après la règle du n°. 13, on a $d. \; (a + bx^m)^n = n \; (a + bx^m)^{n-1} \; d \; (a + \; bx^m)^n = n \; (a \; + \; bx^m)^{n-1} \; mbx^{m-1} \; dx.$

Problème 7e. Différentier $\sqrt{px + x^2}$.

Solution.—Par la règle du n°. 14, $d \; \sqrt{px + x^2} = \frac{pdx + 2 \; xdx}{2 \sqrt{px + x^2}}.$

Problème 8e. Différentier $x \; (a^2 + x^2) \sqrt{a^2 - x^2}$.

Solution.—En suivant la règle du n°. 12, on obtient $d. \; [x (a^2 + x^2) \; \sqrt{a^2 - x^2}] = (a^2 + x^2) \; \sqrt{a^2 - x^2} \times dx$

$+ \; x \; \sqrt{a^2 - x^2} \times \; 2 \; xdx + x (a^2 + x^2) \left[- \frac{2 \; xdx}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} \right].$

Mettant dx en évidence, et réduisant le tout en une seule fraction, on a

$$\frac{(a^2 + x^2) \; (a^2 - x^2) + 2 \; x^2 \; (a^2 - x^2) - x^2 \; (a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} \; dx,$$

et en effectuant les multiplications indiquées, et enfin en réduisant,

$$\frac{a^4 - x^4 + 2\,a^2\,x^2 - 2\,x_4 - a^2x^2 - x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx =$$

$$\frac{a^4 + a^2\,x^2 - 4\,x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

PROBLÈME 9e. Différentier $\dfrac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2\,x^2 + x^4}$.

Solution.—Par la règle du n°. 15, pour la différentiation des fractions, on a

$$d\,\frac{a^2 - x^2}{a^4 + a^2\,x^2 + x^4} = \frac{(a^4 + a^2\,x^2 + x^4)\,(-2\,xdx) - (a^2 - x^2)\,(2\,a^2\,xdx + 4\,x^3dx)}{(a^4 + a^2\,x^2 + x^4)^2};$$

et en effectuant les multiplications indiquées,

$$= \frac{-2\,a^4xdx - 2\,a^2x^3dx - 2\,x^5dx - 2\,a^4xdx - 4\,a^2x^3\,dx + 2\,a^2x^3dx + 4\,x^5dx}{(a^4 + a^2\,x^2 + x^4)^2};$$

puis en réduisant, $= \dfrac{2\,x^5dx - 4\,a^2\,x^3dx - 4\,a^4xdx}{(a^4 + a^2\,x^2 + x^4)^2}$;

et enfin, en mettant $2\,xdx$ en évidence,

$$= \frac{x^4 - 2\,a^2x^2 - 2\,a^4}{(a^4 + a^2x^2 + x^4)^2}\,2\,xdx.$$

PROBLÈME 10c. Différentier

$$\sqrt[4]{[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}]^3}.$$

Solution.—Selon la règle du no. 13, on a

$$d\sqrt[4]{[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}]^3} =$$

$$d\left\{[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt{(c^2 - x^2)^2}]^{\frac{3}{4}}\right\} =$$

$$\tfrac{3}{4}\,[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$d\left\{a - bx^{-\frac{1}{2}} + (c^2 - x^2)^{\frac{2}{3}}\right\} = \text{en différentiant,}$$

$$\tfrac{3}{4}\,[a - \frac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}]^{-\frac{1}{4}} \times$$

$$(\tfrac{1}{2}\,bx^{-\frac{3}{2}}\,dx + \tfrac{2}{3}\,(c^2 - x^2)^{-\frac{1}{3}}(-2\,xdx)) =$$

$$\frac{3\left\{\dfrac{bdx}{2\,x^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{4\,xdx}{3\,(c^2 - x^2)^{\frac{1}{3}}}\right\}}{4\,[a - \dfrac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}]^{\frac{1}{4}}} = \frac{\dfrac{3\,b}{2\,x\sqrt{x}} - \dfrac{4\,x}{\sqrt[3]{c^2 - x^2}}}{4\sqrt[4]{a - \dfrac{b}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{(c^2 - x^2)^2}}}\,dx.$$

ARTICLE QUATRIÈME.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

§ 1. Fonctions logarithmiques.

17. Règle pour différentier une fonction logarithmique.—*Pour avoir la différentielle du logarithme d'une quantité, on divise la différentielle de cette quantité, par cette quantité elle-même.*

En effet, soit à différentier log. x. Soit $\log x = z$. Ajoutant à chaque variable sa propre différentielle, on a $\log(x + dx) = z + dz$, d'où l'on tire $dz = \log(x + dx) - z$, ou $d \log x = \log(x + dx) - \log x =$

$$\log \frac{x + dx}{x} = \log \left(1 + \frac{dx}{x}\right),$$ en effectuant la division des quantités, indiquée par la différence de leurs logarithmes. Donc (*)

$$d \log x = A \left(\frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} + \&c.\right) = A \frac{dx}{x},$$ en négligeant les termes affectés de dx^2, dx^3, &c. infiniment petits du 2d, du 3e ordre, &c.

---

[*] Voyez note B.

Dans le système népérien, ou celui des logarithmes hyperboliques, le module A étant 1, on a $d \log x = \frac{dx}{x}$; donc, &c.

Exemples. 1°. ... $d \log. x^n = \frac{d. x^n}{x^n} = \frac{nx^{n-1} dx}{x^n} = \frac{ndx}{x}$.

2°. ... $d \log. xy = \frac{xdy + ydx}{xy} = \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x}$.

3°. ... $d \log. \frac{x}{y} = d (\log x - \log y) = \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{xy}$.

4°. ... $d \log \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = d (\log x - \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}) = d \log x - \frac{1}{2} d. \log (1 + x^2) = \frac{dx}{x} - \frac{2 xdx}{2 (1 + x^2)} = \frac{dx + x^2dx - x^2dx}{x (1 + x^2)} = \frac{dx}{x (1 + x^2)}$.

5°. ... $d. \log. \sqrt[m]{(a + bx^n)^p} = \frac{p}{m} d. \log (a + bx^n) = \frac{pnbx^{n-1} dx}{m (a + bx^n)}$.

6°. ... $d.\ (\log x)^m = m\,(\log x)^{m-1}\ d.\ \log x =$

$m\,(\log x)^{m-1}\dfrac{dx}{x}$.

7°. ... $d.\ x^m\,(\log x)^n = mx^{m-1}\,(\log x)^n\ dx + nx^m$

$(\log x)^{n-1}\ \dfrac{dx}{x} = mx^{m-1}\,(\log x)^n\ dx + nx^{m-1} \times$

$(\log\ x)^{n-1}\ dx = x^{m-1}\,(\log x)^{n-1}\ dx\ (m \log x + n)$.

8°. ... $d.\ \log\,(\log x) = \dfrac{d.\log x}{\log.\ x} = \dfrac{\dfrac{dx}{x}}{\log x} = \dfrac{dx}{x \log x}$.

9°. ... $d.\ \log \dfrac{a+x}{a-x} = d\log\,(a+x) - d.\ \log\ (a-x)$

$= \dfrac{dx}{a+x} + \dfrac{dx}{a-x} = \dfrac{adx - xdx + adx + xdx}{a^2 - x^2} = \dfrac{2\ adx}{a^2 - x^2}$.

---

§ 2. Fonctions exponentielles.

---

18. Règle pour différentier une fonction exponentielle.—*On multiplie cette fonction par la différentielle du produit de son exposant et du logarithme de la racine.*

En effet, soit à différentier x^y. Soit $x^y = z$. Prenant les logarithmes de chaque membre, on a ...

log. x^y = log z, et en différentiant (17), $d.\log x^y = \frac{dz}{z}$:
donc $dz = z\, d.\log. x^y$; et en substituant à z et à dz leurs valeurs, on a
$d.\, x^y = x^y d.\log. x^y = x^y\, d\,(y \log\, x)$: c. q. f. d.

19. *Remarque.* La base du système *népérien* étant $e = 2,7182818$, dont le logarithme hyperbolique est 1, on aura en différentiant, ... $d.\, e^x = e^x\, d\,(x \log. e) = e^x dx$, c'est-à-dire que cette exponentielle particulière a pour différentielle l'exponentielle même multipliée par la différentielle de son exposant.

---

§ 3. Fonctions trigonometriques.

20. Différentielle d'un sinus.—*La différentielle du sinus d'un arc est égale au produit du cosinus par la différentielle de cet arc.*

En effet, soit $y = \sin x$. Ajoutant à chaque variable sa différentielle, on a $y + dy = \sin\,(x + dx) = \sin x. \cos dx + \sin dx \cos x$. Or dx étant un arc infiniment petit, on aura 1° $\cos\, dx = 1$; ... 2° $\sin dx = dx$ (puisque un arc infiniment petit est sensiblement égal à son sinus). Donc $y + dy = \sin x + \cos x dx$: et mettant les valeurs de y et de dy,
$\sin x + d.\sin x = \sin\, x + \cos\, x dx$. Enfin, effaçant le terme commun $\sin x$, on a $d.\sin x = \cos x dx$: donc, etc.

21. Différentielle d'un cosinus.—*La différentielle du cosinus d'un arc est égale au produit négatif du sinus par la différentielle de cet arc.*

En effet, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Cette équation différentiée donne $2 \sin x\, d.\sin x + 2 \cos x\, d.\cos x = 0$. Divisant par 2, et transposant, $\cos x\, d.\cos x = -\sin x\, d.\sin x$.

Donc $d\cos x = -\dfrac{\sin x\, d.\sin x}{\cos x}$. Mettant (20) la valeur de $d.\sin x$, on a $d.\cos x = -\dfrac{\sin x \cos x\, dx}{\cos x}$ $= -\sin x dx$. Donc, &c.

22. Différentielle d'une tangente.—*La différentielle de la tangente d'un arc est égale à la différentielle de cet arc, divisée par le carré de son cosinus.*

En effet, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Différentiant cette équation (15), on trouve

$$d.\tan x = \frac{\cos x\, d\sin x - \sin x\, d.\cos x}{\cos^2 x}:$$

et, mettant les valeurs de $d.\sin x$ et de $d.\cos x$, trouvées aux nos. 20 et 21, on obtient

$$d.\tan x = \frac{\cos^2 x dx + \sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)\, dx}{\cos^2 x}.$$

Puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a enfin

$d.\tan x = \frac{dx}{\cos^2 x}$; donc, &c.

23. Différentielle d'une cotangente.—*La différentielle de la cotangente d'un arc est égale au quotient négatif de la différentielle de cet arc par le carré de son sinus.*

En effet, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. Différentiant (15, ex. 4e),

on trouve $d.\cot x = -\frac{d.\tan x}{\tan^2 x}$. Mettant la valeur

de $d.\tan x$ (22), on obtient $d.\cot x = -\frac{dx}{\cos^2 x \tan^2 x}$.

Mais $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; d'où l'on tire $\cos x \tan x = \sin x$.

Donc enfin $d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$. Donc, etc.

24. Différentielle d'une sécante.—*La différentielle de la sécante d'un arc est égale au produit continu de la tangente, de la sécante, et de la différentielle de cet arc.*

En effet $\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}$. Différentiant, on a

$d.\text{séc}\, x = -\frac{d\cos x}{\cos^2 x}$. Remplaçant $d\cos x$ par sa

valeur — sin xdx (23), on obtient $d.$ séc $x = \frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$

= (en décomposant)

$\frac{\sin x}{\cos x} \frac{1}{\cos x} dx.$

Mais $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$, et $\frac{1}{\cos x} =$ séc x. Donc enfin ...

$d.$ séc $x = \tan x.$ séc $x.$ $dx.$ Donc, &c.

25. Différentielle d'une cosécante.—*La différentielle de la cosécante d'un arc est égale au produit continu négatif de la cotangente, de la cosécante, et de la différentielle de cet arc.*

En effet, coséc $x = \frac{1}{\sin x}$. Différentiant, on trouve

$d.$ coséc $x = - \frac{d. \sin x}{\sin^2 x} =$ (20) $- \frac{\cos xdx}{\sin^2 x} =$

$- \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} dx.$ Et puisque $\frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$, et que

$\frac{1}{\sin x} =$ coséc x, on a enfin

$d.$ coséc $x = -$ cot $x.$ coséc $x.$ $dx.$ Donc, etc.

26. Différentielle d'un sinus-verse.—*La différentielle du sinus-verse d'un arc est égale au produit du sinus par la différentielle de cet arc.*

En effet, sin verse $x = 1 - \cos x$. Donc en différentiant (21), on a $d.$ sin verse $x =$ sin xdx. Donc, &c.

CHAPITRE II.

APPLICATIONS.

ARTICLE PREMIER.

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE NEWTON.

27. Soit $(1+x)^m = A + B\,x + C\,x^2 + Dx^3 + \&c.$ A, B, C, D, &c. étant des coefficients dans lesquels n'entre point x. Cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, soit $x = 0$: elle se réduit alors à $1 = A$.

Substituant donc cette valeur de A, on a

$$(1+x)^m = 1 + B\,x + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

Différentiant les deux membres de cette équation, on trouve

$$m\,(1+x)^{m-1}dx = B\,dx + 2\,C\,x\,dx + 3\,D\,x^2\,dx + \&c.$$

Supprimant le facteur commun dx, on a

$$m\,(1+x)^{m-1} = B + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + \&c.$$

Soit $x = 0$, comme précédemment : il vient $m = B$.

Substituant cette valeur de B, on trouve

$$m\,(1+x)^{m-1} = m + 2\,C\,x + 3\,D\,x^2 + \&c.$$

Différentiant de nouveau, et effaçant dx, on obtient

$$m\,(m-1)\,(1+x)^{m-2} = 2\,C + 2.\,3\,D\,x + \&c.$$

Faisant $x = 0$, on a $m\,(m-1) = 2\,C$: donc

$$C = \frac{m\,(m-1)}{2}.$$

Continuant ainsi, on trouverait

$$D = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{2.\,3}, \&c.$$

Substituant ces différentes valeurs dans la première équation, on a

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}\,x + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2}\,x^2 +$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\,2.\,3}\,x^3 + \&c.$$

Soit maintenant $x = \frac{b}{a}$; on aura

$$(1+x)^m = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{a+b}{a}\right)^m =$$

$$\frac{(a+b)^m}{a^m} = 1 + \frac{m\,b}{1\,a} + \frac{m\,(m-1)}{1.\,2}\,\frac{b^2}{a^2} +$$

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1.\,2.\,3}\,\frac{b^3}{a^3} + \&c.$$

Chassant enfin le dénominateur a^m, on obtient

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}\frac{a^m}{a} b + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{a^m}{a^2} b^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{a^m}{a^3} b^3 + \&c.$$

et réduisant,

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^{m-3} b^3 + \&c.$$

formule de Newton. (*)

ARTICLE DEUXIÈME.

SOUS-TANGENTES.

28. Problème.—*Trouver l'expression générale de la sous-tangente dans une courbe algébrique quelconque.* (Fig. 1ère.)

Soit la courbe A*mn*. Menons l'ordonnée *pn* infiniment proche de l'ordonnée P*m*, et *m*R parallèle à l'axe AP des abscisses : alors *n*R sera la différentielle de l'ordonnée *m*P ; et *m*R = P*p*,

[*] Voyez note A. Voyez aussi III, note C.

celle de l'abscisse AP : de même l'arc infiniment petit mn, qui est censé se confondre avec la partie correspondante de la tangente, sera la différentielle de l'arc Am. Soit AP $= x$, mP $= y$; donc mR $= dx$, et nR $= dy$: soit enfin la sous-tangente TP $= s$.

Cela posé, à cause des triangles mnR, TmP, semblables puisqu'ils ont leurs côtés parallèles, on a la proportion
nR : mR : : mP : TP, ou $dy : dx :: y : s = \frac{ydx}{dy}$, expression générale de la sous-tangente.

Applications de cette formule.

---

29. Parabole.—L'équation de cette courbe est $y^2 = px$. En la différentiant, on a $2ydy = pdx$. Multipliant chaque membre par y,... $2y^2dy = pydx$.

Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$. Mettant la valeur de y_2, on obtient

$\frac{ydx}{dy}$ ou $s = \frac{2px}{p} = 2x$, c'est-à-dire que la sous-tangente est égale au double de l'abscisse.

30. Ellipse.—L'équation est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

En différentiant, on obtient $2\,ydy = -\frac{b^2}{a^2}\,2\,xdx$:

divisant par 2 et multipliant par y, ... $y^2dy =$

$-\frac{b^2}{a^2}xydx$. Donc $\frac{ydx}{dy} = -\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}x}$. Substituant à y^2

sa valeur, on a

$$\frac{ydx}{dy} \text{ ou } s = -\frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{\frac{b^2}{a^2}x} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

31. Courbe dont l'équation est $x^2 + 2\,bx - y^2 - 2\,cy = m^2$.—Différentiant cette équation, on a $2\,xdx + 2\,bdx - 2\,ydy - 2\,cdy = 0$. Divisant par 2 et transposant, ... $xdx + bdx = ydy + cdy$: multipliant par y, ... $xydx + bydx = y^2\,dy + cydy$, ou

$(x + b)\,ydx = (y^2 + cy)\,dy$. Donc $\frac{ydx}{dy}$ ou $s = \frac{y^2 + cy}{x + b}$.

32. Courbe dont l'équation est $m^2 + nx = 2\,cy + y^2$.—Différentiant, on a $ndx = 2\,cdy + 2ydy$. Multipliant par y, ... $nydx = (2\,cy + 2\,y^2)\,dy$.

Donc $\frac{ydx}{dy}$ ou $s = \frac{2\,cy + 2\,y^2}{n}$.

33. Cercle.—L'équation de cette courbe est $y^2 = a^2 - x^2$. Différentiant, on a donc

$2\,ydy = -2\,xdx$; donc $y^2dy = -xydx$. Donc aussi

$\frac{ydx}{dy}$, ou $s = \frac{y^2}{x}$.

ARTICLE TROISIÈME.

SOUS-NORMALES.

34. Problème.—*Trouver l'expression générale de la sous-normale dans une courbe algébrique.*

(Fig. 1ère.)

Soit toujours $m\mathrm{P} = y$, $\mathrm{AP} = x$; donc $n\mathrm{R} = dy$ et $m\mathrm{R} = dx$: soit encore la sous-normale $\mathrm{PB} = u$.

Cela posé, les deux triangles rectangles $mn\mathrm{R}$, $m\mathrm{PB}$ sont semblables, parce qu'ils ont leurs côtés correspondants respectivement perpendiculaires. Donc on a la proportion $m\mathrm{R} : n\mathrm{R} :: m\mathrm{P} : \mathrm{PB}$, ou

$dx : dy :: y : u = \frac{ydy}{dx}$, expression générale de la sous-normale.

Applications de cette formule.

35. Parabole.—En différentiant l'équation $y^2 = px$, on obtient $2\,ydy = pdx$.

Donc $\frac{ydy}{dx}$ ou $u = \frac{p}{2}$: donc la sous-normale de la parabole est égale à la moitié du paramètre.

36. Hyperbole.—L'équation de cette courbe est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$. En la différentiant, on a $2\,ydy = \frac{b^2}{a^2} 2\,xdx$. Donc $\frac{ydy}{dx}$ ou $u = \frac{b^2\,x}{a^2}$.

37. Courbe dont l'équation est $m^2 + nx = 2\,cy + y^2$.—Différentiant on a $ndx = 2\,cdy + 2\,ydy$. Multipliant par y, ... $nydx = (2\,c + 2\,y)\,ydy$. Donc $\frac{ydy}{dx}$ ou $u = \frac{ny}{2\,c + 2\,y}$.

38. Courbe dont l'équation est $x^2 + 2\,bx - y^2 - 2\,cy = m^2$.—Différentiant cette équation, on obtient $2\,xdx + 2\,bdx - 2\,ydy - 2\,cdy = 0$. Divisant par 2, multipliant par y et transposant, on a

$xydx + bydx = y^2\,dy + cydy$, ou

$(xy + by)\,dx = (y + c)\,ydy$. Donc

$\frac{ydy}{dx}$ ou $u = \frac{xy + by}{y + c}$.

39 Cercle.—Différentiant l'équation $y^2 = a^2 - x^2$, on a $2\,ydy = -2\,xdx$.

Donc $\frac{ydy}{dx}$ ou $u = -x$.

ARTICLE QUATRIÈME.

—

MAXIMA ET MINIMA.

40. La valeur d'une fonction est un *maximum* ou un *minimum*, lorsqu'elle est plus grande ou plus petite, que les valeurs qui la précèdent, et que celles qui la suivent immédiatement.

Ainsi dans la courbe BMND, l'ordonnée PM est un *maximum*, et l'ordonnée *p*N, un *minimum*. (Fig. 2e.)

Il est évident que, dans le cas de *maximum* ou de *minimum*, la différentielle est égale à 0, puisque si la quantité pouvait encore croître ou décroître, elle ne serait pas un *maximum* ou un *minimum*.

41. Problème 1er.—*Trouver la plus grande ordonnée dans un cercle, en comptant les abscisses de l'origine du diamètre.*

Solution.—L'équation est alors $y^2 = 2\ ax - x^2$. La différentiant, on a $2\ ydy = 2\ adx - 2\ xdx$.

Mais l'ordonnée y devant être un *maximum*, $dy = 0$. Donc $2\ adx - 2\ xdx = 0$: donc $xdx = adx$; donc $x = a$; donc y est un *maximum*, quand $x = a$, c'est-à-dire que la plus grande ordonnée correspond à une

abscisse égale au rayon.—Substituant cette valeur de x dans celle de y, on trouve $y^2 = 2\ a^2 - a^2 = a_2$, ou $y = a$. Donc la plus grande ordonnée est elle-même égale au rayon, ou est celle qui passe par le centre.

42. Problème 2e.—*Trouver la plus grande ordonnée dans un cercle, en comptant les abscisses du centre.*

Solution.—Dans ce cas, $y^2 = a^2 - x^2$; donc, en différentiant, $2\ ydy = -2\ xdx$. Mais dy étant $= 0$, puisque y doit être un *maximum*, $-2\ xdx = 0$; donc $x = 0$ aussi. Substituant cette valeur de x dans celle de y, on a $y^2 = a^2$, ou $y = a$, même résultat que dans le problème précédent.

43. Problème 3e.—*Couper une ligne en deux parties telles que leur produit soit le plus grand possible.*

Solution.—Soit a cette ligne : soit x l'une des parties ; l'autre sera donc $a - x$. Le produit $ax - x^2$ devant être un *maximum*, on aura, en différentiant, $adx - 2\ xdx = 0$. Donc $2\ xdx = adx$;

donc $2\ x = a$; donc $x = \frac{a}{2}$. Donc alors

$a - x = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}$: c'est-à-dire que le produit

sera un *maximum*, lorsque la ligne sera divisée en deux parties égales.

44. Problème 4e.—*Trouver la fraction qui excède son carré de la plus grande quantité possible.*

Solution.—Soit x cette fraction. Donc la différentielle de $x - x^2$, ou $dx - 2\,xdx = 0$. Divisant par dx, on a $1 - 2\,x = 0$: donc $2\,x = 1$; donc $x = \frac{1}{2}$.... Et $x - x^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Donc $\frac{1}{4}$ est la plus grande quantité dont une fraction puisse excéder son carré.

45. Problème 5e.—*Trouver le plus grand rectangle qui puisse être inscrit dans un triangle donné.* (Fig. 3e.)

Solution.—Les deux triangles *bac* et *bgf* étant semblables, parce que leurs côtés sont parallèles, leurs bases sont entre elles comme leurs hauteurs : donc $bd : be :: ac : gf$. Soit la hauteur bd du triangle $= h$; et sa base $ac = b$: soit la hauteur ed du rectangle $fgpr = x$; $be = h - x$. Donc on a

$$h : h - x :: b : gf = \frac{bh - bx}{h},$$ base du rectangle.

En la multipliant par sa hauteur x, on aura pour sa surface $S = \dfrac{bhx - bx^2}{h}$. En différentiant, ...

$$\frac{bhdx - 2\,bxdx}{h} = 0$$: multipliant par h, et divisant par bdx ... $h - 2\,x = 0$; donc $2\,x = h$; donc $x = \dfrac{h}{2}$;

c'est-à-dire que le plus grand rectangle, qu'on puisse inscrire dans un triangle donné, est celui qui a pour hauteur la moitié de celle du triangle.

Sa surface sera $S = \dfrac{\dfrac{bh^2}{2} - \dfrac{bh^2}{4}}{h} = \dfrac{bh}{4}$.

46. Problème 6e.—*Déterminer le plus grand triangle rectangle que l'on puisse construire sur une hypoténuse donnée.*

Solution.—Soit l'hypoténuse donnée $= h$: l'un des côtés de l'angle droit $= x$; l'autre $= y = \sqrt{h^2 - x^2}$. La surface du triangle sera égale à

$\dfrac{xy}{2} = \frac{1}{2}\, x \sqrt{h^2 - x^2}$. En différentiant ce produit, d'après les nos. 12 et 14, on a

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{h^2 - x^2} \times dx - \frac{2\,x^2 dx}{2\sqrt{h^2 - x^2}}\right) = 0.$$

Divisant par $\frac{1}{2}\, dx$, ... $\sqrt{h^2 - x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{h^2 - x^2}} = 0.$

Faisant disparaître le diviseur, ... $h^2 - x^2 - x^2 = 0$;

donc $2\,x^2 = h^2$; donc $x = \sqrt{\dfrac{h^2}{2}} = \dfrac{h}{\sqrt{2}}$. ....

Substituant cette valeur de x dans celle de y, on a

$y = \sqrt{h^2 - x^2} = \sqrt{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \sqrt{\frac{h^2}{2}} = \frac{h}{\sqrt{2}}$: c'est-à-dire que la surface du triangle est un *maximum*, quand les deux côtés de l'angle droit sont égaux.

Cette surface alors $= \frac{h^2}{4}$.

47. Problème 7e.—*Trouver la plus courte ligne que l'on puisse tirer par un point donné entre deux autres lignes à angle droit.* (Fig. 4e.)

Solution.—Soient BT et BV les deux droites indéfinies données, et P le point aussi donné : soit de plus MB $= a$, MP $= b$, TM $= x$, et la droite cherchée TV $= u$. Les deux triangles rectangles semblables TMP, TBV donnent la proportion TM : TB : MP : BV, ou $x : a + x :: b :$ BV $= \frac{b(a+x)}{x}$..... Mais TV $= \sqrt{\text{TB}^2 + \text{BV}^2}$,

ou $u = \sqrt{(a+x)^2 + \frac{b^2(a+x)}{x^2}} =$

$\sqrt{\frac{x^2(a+x)^2 + b^2(a+x)^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{(a+x)^2(x^2+b^2)}{x^2}}$

$= \frac{a+x}{x}\sqrt{x^2+b^2}$. Mais u doit être un *minimum* :

donc, en différentiant, on aura

$$\sqrt{x^2+b^2}\,\frac{xdx-adx-xdx}{x^2}+\frac{(a+x)\,(2\,xdx)}{2\,x\,\sqrt{x^2+b^2}}=0.$$

Donc $\sqrt{x^2+b^2}\times-\dfrac{adx}{x^2}+\dfrac{axdx+x^2\,dx}{x\,\sqrt{x^2+b^2}}=0.$

Réduisant les deux termes du premier membre au même dénominateur, ...

$\dfrac{(x^2+b^2)\,(-adx)+x\,(axdx+a^2dx)}{x^2\,\sqrt{x^2+b^2}}=0.$ Chassant le diviseur, et effectuant les multiplications indiquées au numérateur, ... $-ax^2dx-ab^2dx+ax^2dx+x^3dx=0$. Réduisant, divisant par dx, et transposant, on a $x^3=ab^2$; donc $x=\sqrt[3]{ab^2}$.

Les deux points T et P, étant alors connus, détermineront la direction de la ligne TV.

48. Problème 8e.—*Trouver le plus grand trapèze qui puisse être inscrit dans un demi-cercle donné.* (Fig. 5e.)

Solution.—Soit le rayon ac ou cd du cercle donné $=a$; soit la hauteur bc du trapèze $=x$. Alors $ab=\sqrt{a^2-x^2}$. Or la surface de ce trapèze est égale au produit de sa hauteur bc par la demi-somme de ses bases, c'est-à-dire par $cd+ab$. Donc $S=x(a+\sqrt{a^2-x^2})=ax+x\sqrt{a^2-x^2}$. En différentiant cette équation, on a

$adx + \sqrt{a^2 - x^2} \times dx - \frac{x_2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0.$ Otant le diviseur $\sqrt{a^2 - x^2}$ et divisant par dx, on obtient $a\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 - x^2 - x^2 = 0$;.... donc $a^2 - 2x^2 = -a\sqrt{a^2 - x^2}$. Et en élevant les deux membres au carré,

$a^4 - 4a^2x^2 + 4x^4 = a^2(a^2 - x^2) = a^4 - a^2x^2.$
Donc, en réduisant, $4x^4 = 3a^2x^2$: donc $4x^2 = 3a^2$: donc $x^2 = \frac{3}{4}a^2$; donc $x = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$: c'est-à-dire que le plus grand trapèze, qui puisse être inscrit dans un demi-cercle donné, est celui qui a pour hauteur le demi-rayon du cercle, multiplié par $\sqrt{3}$.

49. Problème 9e.—*Déterminer les dimensions d'un vase cylindrique, tel qu'il ait une capacité donnée, et que sa surface intérieure soit la plus petite possible.*

Solution.—Soit x le diamètre intérieur de ce vase. Soit Π la circonférence d'un cercle dont le diamètre $= 1$. On aura la circonférence du vase en disant $1 : \Pi :: x : C = \Pi x$. En multipliant par le quart du diamètre x, on aura $\frac{\Pi x^2}{4}$ pour l'expression de la surface de la base. (1)

Soit maintenant la capacité donnée $= c_3$: cette capacité étant égale au produit de la hauteur h par la surface de la base, on aura $h = \frac{c^3}{\frac{\Pi x^2}{4}} = \frac{4 c^3}{\Pi x^2}$.

Donc la surface latérale intérieure, qui est égale au produit de la hauteur par la circonférence de la base, égalera $\frac{4 c^3}{\Pi x^2} \times \Pi x = \frac{4 \Pi x c^3}{\Pi x^2} = \frac{4 c^3}{x}$. (2)

La surface intérieure totale sera donc égale à (1) + (2), ou

$S = \frac{\Pi x^2}{4} + \frac{4 c^3}{x}$. En différentiant, on aura

$\frac{2 \Pi x dx}{4} - \frac{4 c^3 dx}{x^2} = 0$. Multipliant par x^2 et divisant par dx, ... $\frac{\Pi x^3}{2} - 4 c^3 = 0$; donc

$\Pi x^3 = 8 c^3$; donc $x^3 = \frac{8 c^3}{\Pi}$; donc $x = \frac{2 c}{\sqrt{\Pi}}$

Donc $h = \frac{4 c^3}{\Pi x^2} = \frac{4 c^3}{\frac{4 \Pi c^2}{\sqrt[3]{\Pi^2}}} = \frac{c}{\sqrt[3]{\Pi}}$. Donc la sur-

face intérieure sera un *minimum*, quand la hauteur sera la moitié du diamètre intérieur de la base.

50. Problème 10e.—*De tous les cylindres inscrits dans un cône droit, déterminer celui qui a le plus grand volume.* (Fig. 6e.)

Solution.—Soit la hauteur SC du cône $= a$; le rayon AC de sa base $= b$; soit encore SD $= x$; donc DC $= a - x$. Les deux triangles semblables SCA, SDE donnent la proportion SC : AC :: SD : DE, ou $a : b :: x : \frac{bx}{a}$.

Soit 1 : π le rapport du diamètre à la circonférence : on aura la circonférence de la base supérieure du cylindre, en disant $1 : \pi :: \frac{2bx}{a} : C = \frac{2\pi bx}{a}$. La multipliant par la moitié du rayon $\frac{bx}{a}$, on a la surface de cette base $= \frac{\pi b^2 x^2}{a^2}$. Multipliant cette surface par la hauteur CD du cylindre $= a - x$, on a enfin pour la solidité $S = \frac{\pi b^2}{a^2}(ax^2 - x^3)$.

Différentiant cette équation, on obtient

$\frac{\Pi\, b_2}{a^2}(2\, axdx - 3\, x^2dx) = 0.$ Divisant par

$\frac{\Pi\, b^2}{a^2}\, dx$, ... $2\, ax - 3\, x^2 = 0$; donc $2\, a = 3\, x$; donc

$x = \frac{2a}{3}$. Donc $DC = a - x = a - \frac{2\, a}{3} = \frac{a}{3}$: c'est-

à-dire que de tous les cylindres inscrits dans un cône droit, celui qui a le plus grand volume a pour hauteur le tiers de celle du cône.

51. *Remarque.*—Pour s'assurer qu'une quantité y est un *maximum* ou un *minimum*, lorsque la quantité x, dont elle est une fonction, a une certaine valeur, on augmente ou l'on diminue x d'une quantité très petite, b par exemple, et l'on voit alors si par là y est augmentée ou diminuée.

Ainsi dans le 1er Problème, n°. 41, on a trouvé que y est un *maximum*, quand $x = a$, et qu'alors $y^2 = a^2$. Pour s'en assurer, soit $x = a \pm b$. Alors $y^2 = 2\, ax - x^2 = a^2 \pm 2\, ab - a^2 \mp 2\, ab - b^2 = a^2 - b^2$, quantité plus petite que a^2 ; par conséquent $y = a$ est un *maximum*.

———oooo———

CALCUL INTEGRAL.

CHAPITRE I.

PRINCIPES.

ARTICLE PREMIER.—DÉFINITIONS.

52. Le *Calcul intégral* est l'art de trouver la fonction de laquelle dérive une différentielle donnée.

Par cette définition, on voit que ce Calcul est l'inverse du Calcul différentiel. Newton le nomme *Calcul des fluentes.*

53. On indique *l'intégrale* d'une quantité différentielle par la lettre $\int$, que l'on place devant cette quantité, et l'on prononce *somme de,* ou *intégrale de.* (70)

54. Quand on différentie une quantité quelconque, les termes constants ne passent pas dans la différentielle (6) ; de là quand on intègre, on doit

ajouter à l'intégrale une constante arbitraire, que la nature du problème détermine. Nous la désignerons toujours par la lettre C.

55. On entend ici généralement par *quantité différentielle* toute quantité affectée de la différentielle d'une ou de plusieurs variables, comme dx, dy.

ARTICLE DEUXIÈME.

INTÉGRATION DES QUANTITÉS DIFFÉRENTIELLES A UNE SEULE VARIABLE.

§ 1. Differentielles monomes.

56. Règle fondamentale pour intégrer une différentiele monome.—*On augmente d'une unité, l'exposant de la variable et l'on divise ensuite la différentielle proposée, ainsi altérée, par le produit de l'exposant ainsi augmenté d'une unité, et de la différentielle de la variable.*

En effet, cette règle d'intégration n'est que l'inverse de la règle de différentiation d'une puissance, donnée au n°. 13.

Exemples .... 1°. .... $\int mx^{m-1}\,dx = \frac{mx^m\,dx}{m\,dx} = x^m.$

(13)

2°. .... $\int 2\,x\,dx = \frac{2\,x^2 dx}{2\,dx} = x^2 + C.$ (54)

3°. .... $\int x\,dx = \frac{x^2 dx}{2\,dx} = \frac{x^2}{2} + C.$

4°. .... $\int a\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int ax^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{ax^{\frac{5}{3}}\,dx}{\frac{5}{3}\,dx} = \frac{3}{5}\,ax^{\frac{5}{3}} =$

$\frac{3}{5}\,a\sqrt[3]{x^5} + C.$

5°. .... $\int \frac{a\,dx}{x^3} = \int ax^{-3}\,dx = \frac{ax^{-2}\,dx}{-2\,dx} =$

$-\frac{a}{2\,x^2} + C.$

§ 2. Différentielles polynomes qui peuvent s'intégrer par la règle fondamentale d'intégration.

57. I. On peut encore intégrer par la règle précédente toute quantité dans laquelle il n'entre point de puissances de polynomes, ni de diviseurs

polynomes, à moins que ces derniers ne soient des quantités constantes.

Exemples .... 1°. $\int (ax^3dx + \frac{bx^2dx}{c} + edx) =$

(en intégrant chaque terme séparément)....

$$\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3c} + ex + C.$$

2°.... $\int \left[ax^3dx + \frac{bdx}{x^4} \right] = \int (ax^3dx + bx^{-4}\,dx) =$

$$\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^{-3}}{3} + C = \frac{ax^4}{4} - \frac{b}{3\,x_3} + C.$$

58. II. Quand même il entrerait, dans la différentielle proposée, des puissances de polynomes, on pourrait encore intégrer par la règle fondamentale, pourvu que ces puissances eussent un exposant entier positif, et qu'elles ne se trouvassent pas au dénominateur.

Exemple .... $\int (a + bx^2)^3\,dx$. Il faut développer $(a + bx^2)^3$, ce qui donne $a^3 + 3\,a^2bx^2 + 3\,ab^2x^4 + b^3x^6$. On a donc alors .... $\int (a + bx^2)^3\,dx =$

$\int (a^3dx + 3\,a^2bx^2dx + 3\,ab^2x^4dx + b^3x^6dx) =$

$$a^3x + a^2bx^3 + \frac{3\,ab^2x^5}{5} + \frac{b^3x^7}{7} + C.$$

59. *Remarque.*—Il y a un cas qui échappe à la règle fondamentale d'intégration ; c'est celui où l'exposant de la puissance est —1.

Ainsi, $\int x^{-1}\,dx = \frac{x^{-1+1}\,dx}{(-1+1)\,dx} = \frac{x^0}{0}$.

Mais comme $x^{-1}\,dx = \frac{dx}{x}$, on a

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \log. x + C. \quad (17)$$

§ 3. Différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle.

60. Sinus.—Appelons z un arc de cercle quelconque, et soit x son sinus. On a donc $x = \sin z$. Différentiant, on obtient $dx = d.\ \sin z = \cos z\ dz$.

(20) Donc $dz = \frac{dx}{\cos z}$. Or $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z} = \sqrt{1 - x^2}$. Donc $dz = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Et, en intégrant, on trouvera $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = z + C$.

Pour déterminer cette constante C, supposons x, le sinus, $= 0$; alors l'arc z est aussi égal à 0 : donc C se réduit à 0. Donc z, ou l'arc dont le sinus est x, ce qu'on exprime ainsi ....

$$\text{arc}\,(\sin = x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad \text{(a)}$$

61. Tangente.—Soit $z =$ un arc quelconque, et $x =$ sa tangente. Donc $x = \tan z$. Différentiant cette équation, on a $dx = \dfrac{dz}{\cos^2 z}$ (22). Mais

$$\cos z = \frac{1}{\text{séc}\, z}\ ; \text{ donc } \cos^2 z = \frac{1}{\text{séc}^2 z}. \text{ Or}$$

$$\text{séc}^2 z = 1 + \tan^2 z. \text{ Donc } \cos^2 z = \frac{1}{1 + \tan^2 z} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Cependant l'équation $dx = \dfrac{dz}{\cos^2 z}$ donne $dz = \cos^2 z\, dx$

$$= \frac{dx}{1 + x^2}. \text{ Donc } z \text{ ou arc } (\tan = x) = \int \frac{dx}{1 + x^2}. \text{(b)}$$

§ 4. Intégration par les séries.

62. Problème 1er.—Intégrer par série $\dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Solution.—$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$ Développant $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ par le Binome de Newton (*), on trouve $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6 + \&c.$

Donc $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$\int (dx + \frac{1}{2}x^2dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^4dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^6dx + \&c.) =$

$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \&c. =$

arc $(\sin = x)$ .... (60, form. (a)).

63. Cette série peut servir à faire trouver une valeur approximative de la circonférence. En effet, le rayon étant supposé $= 1$, le sinus de $30^\circ = \frac{1}{2}$. Remplaçant donc x par $\frac{1}{2}$, on aura

arc $(\sin = \frac{1}{2}) =$ arc $30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{128} + \&c.$

En s'en tenant aux dix premiers termes de cette série, on trouve .... arc $30^\circ = 0{,}52359877$. Donc la demi-circonférence $= 6 \times 0{,}52359877 = 3{,}14159262$, valeur dans laquelle l'erreur ne porte que sur la dernière décimale, qui devrait être 5.

64. Problème 2nd.—Intégrer par série $\frac{dx}{1+x^2}$.

(*) Voyez IV, note A.

Solution.—$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1+x^2)^{-1}\, dx$. Or (*)

$(1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 +$ &c. Donc

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int (dx - x^2 dx + x^4 dx - x^6 dx + \text{\&c.})$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{\&c.} = \text{arc}\,(\tan = x) \ldots.$$

(61, form. (b)).

65. Problème 3ème.—Trouver le logarithme de $\frac{a+x}{a-x}$.

Solution.—D'après la règle du n°. 17,

$d.\log(a+x) = \frac{dx}{a+x} = (a+x)^{-1}\, dx$. Or $(a+x)^{-1}$

$= (**)\ \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} +$ &c. Donc $\log(a+x) =$

$$\int \frac{dx}{a+x} = \int \left(\frac{dx}{a} - \frac{x\,dx}{a^2} + \frac{x^2 dx}{a^3} - \frac{x^3 dx}{a^4} + \text{\&c.} \right)$$

Intégrant, $\log(a+x) = \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{x^3}{3\,a^3} - \frac{x^4}{4\,a^4}$

(*) Voyez II, note A.

(**) Voycz I, note A.

+ &c. .... Mettant $-x$ au lieu de x,

$$\log\,(a-x) = -\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2\,a^2} - \frac{x^3}{3\,a^3} - \frac{x_4}{4\,a^4} - \&c.$$

Le logarithme du quotient étant égal au logarithme du dividende moins celui du diviseur, on aura donc enfin

$$\log.\ \frac{a+x}{a-x} = \frac{2\,x}{a} + \frac{2\,x^3}{3\,a^3} + \frac{2\,x^5}{5\,a^5} + \&c.$$

$$= 2\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5} + \&c.\right) \text{ .... (c)}$$

66. Problème 4ème.—*Trouver le logarithme ordinaire de* 2.

Solution.—On peut pour cela se servir de la formule (c) n°. 65, en multipliant la série qu'elle contient par le module $m = 0{,}4342944819$ &c. des logarithmes ordinaires; de sorte que l'on aura

$$\log\ \frac{a+x}{a-x} = 2\,m\left(\frac{x}{a} + \frac{x^3}{3\,a^3} + \frac{x^5}{5\,a^5} + \frac{x^7}{7\,a^7} + \frac{x^9}{9\,a^9} + \frac{x^{11}}{11\,a^{11}} + \frac{x^{13}}{13\,a^{13}} + \&c.\right).$$

On voit que chaque terme de cette série est égal à celui qui le précède multiplié par $\frac{x^2}{a^2}$, pourvu

qu'on divise successivement chaque terme respectif par 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c.

Soit donc $\frac{a+x}{a-x} = 2$. On a ... $a + x = 2a - 2x$;

donc $3x = a$, et $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$; donc $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$. Mais il est évident qu'il suffit de multiplier $2m =$

$2 \times 0{,}4342944819$ &c. $= 0{,}868588964$ &c. par $\frac{x}{a} = \frac{1}{3}$,

et ensuite successivement par $\frac{x^2}{a^2} = \frac{1}{9}$, en divisant, selon leur ordre, les termes respectifs par les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c. qui se trouvent aux dénominateurs des termes de la série, ainsi :

3)0,868588964			
9)0,289529654	1)	0,289529654(	0,289529654
9) 32169962	3)	0,032169962(	10723321
9) 3574440	5)	3574440(	714888
9) 397160	7)	397160(	56737
9) 44129	9)	44129(	4903
9) 4903	11)	4903(	446
9) 545	13)	545(	42
9) 61	15)	61(	4
			0,301029995=log.2.

Dans les tables à sept décimales, on le trouve $= 0{,}3010300$.

ARTICLE TROISIÈME.

INTÉGRATION DES QUANTITÉS DIFFÉRENTIELLES A PLUSIEURS VARIABLES.

67. Si l'on se rappelle la règle pour différentier les quantités à plusieurs variables (11, 12), on verra, dit Bezout, (*) que pour intégrer les différentielles à plusieurs variables (lorsque cela est possible), il faut rassembler tous les termes affectés de la différentielle d'une même variable, et les intégrer comme si toutes les autres quantités étaient constantes. Alors si l'on différentie cette intégrale, en faisant varier successivement toutes les variables, et si l'on retranche le résultat de la différentielle proposée, l'intégrale qu'on a trouvée (augmentée d'une constante) est la véritable intégrale, s'il ne reste rien. S'il y a un reste, on suivra à l'égard de ce reste le même procédé que l'on a suivi d'abord, et ainsi de suite.

Par exemple, si l'on avait à intégrer

$$3\,x^2ydx + x^3dy + 5\,xy^4dy + y^5dx \;....\; (f),$$

(*) Cours de Mathématiques, Nlle Ed. 4e. partie, page 178.

on prendrait les deux termes affectés de dx, savoir:

$$3\,x^2ydx + y^5dx,$$

et on les intègrerait comme si y était constant (57). L'intégrale est $x^3y + xy^5$.—Différentiant cette qnantité par rapport à x et à y successivemeut (12), on aurait $3\,x^2ydx + x^3dy + 5\,xy^4dy + y^5dx$, et retranchant ce résultat de la différentielle proposée (f), il ne reste rien. Donc l'intégrale demandée est

$$x^3y + xy^5 + C.$$

68. Si l'on avait à intégrer

$x^3dy + 3\,x^2ydx + x^2dz + 2\,xzdx + xdx + y^2dy$ ... (g),

en rassemblant tous les termes affectés de dx, savoir:

$$3\,x^2ydx + 2\,xzdx + xdx,$$

et intégrant en regardant y & z comme des constantes, on aurait .... $x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2}$ .... Différentiant cette quantité en faisant varier successivement x, y et z, on aurait .... $3\,x^2ydx + x^3dy + 2\,xzdx + x^2dz + xdx$. Retranchant ce résultat de la différentielle proposée (g), il reste y^2dy; on prend donc l'intégrale de y^2dy, qui est $\frac{y^3}{3}$, et l'ajoutant à celle que l'on a déjà trouvée, on a pour intégrale totale

$$x^3y + x^2z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C.$$

CHAPITRE II.

APPLICATIONS.

ARTICLE PREMIER.

QUADRATURE DES COURBES.

69. Problème.—*Carrer une courbe algébrique quelconque* (Fig. 1ère.).

Solution.—Soit l'abscisse AP $= x$, l'ordonnée mP $= y$: donc nR $= dy$, et mR $=$ P$p = dx$.—Il est évident que l'on peut prendre pour différentielle de l'espace AimP, le trapèze mnpP, si l'on suppose les deux ordonnées mP et np infiniment proches l'une de l'autre. Or le rectangle mRpP ne diffère du trapèze mnpP que du triangle mnR; il peut donc aussi être pris pour différentielle de l'espace AimP, puisque la surface de ce triangle mnR est égale au produit de sa hauteur nR $= dy$, par la moitié de sa base mR $= dx$, et par conséquent est un infiniment petit du second ordre $\frac{dxdy}{2}$, que l'on peut négliger

sans erreur sensible par rapport au trapèze mnpP, infiniment petit du premier ordre. Mais le rectangle mRpP est égal au produit de mP par mR, ou à ydx. Donc en intégrant on aura l'espace AimP $= S$, c'est-à-dire $S = \int ydx$.

70. *Remarque* —On voit ici que l'on peut regarder cet espace AimP comme formé d'une infinité de ces trapèzes mnpP : donc ces trapèzes peuvent être considérés comme les *éléments* de cet espace, et cet espace lui-même est égal à la *somme* de ces éléments. (53)

Pour intégrer l'expression précédente, il suffit de substituer à y, sa valeur tirée de l'équation de la courbe.

Applications de cette formule.

---

71. Parabole. I. *Espace intérieur.*—1° En supposant x variable. (Fig. 1ère.)

L'équation de cette courbe est $y^2 = px$; donc $y = \sqrt{px} = p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$. La surface $S = \int ydx = \int p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx =$

$\frac{p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} p^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xp^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} xy$. Donc l'espace pa

rabolique intérieur A*im*P est égal aux deux tiers du rectangle formé par l'abscisse et l'ordonnée.

72. .... —2°. En supposant y variable.

En différentiant l'équation $y^2 = px$, on a

$2\,ydy = pdx$; donc $dx = \frac{2\,ydy}{p}$. Donc $S = \int ydx =$

$\int \frac{2\,y^2dy}{p} = \frac{2\,y^3}{3\,p} = \frac{2\,y^2y}{3\,p} = \frac{2}{3}\frac{pxy}{p} = \frac{2}{3}xy$, même résultat que celui du n°. précédent.

Quant à la constante C, lorsque $y = 0$, on voit, par la seule inspection de la figure, que S devient aussi 0. Donc alors $S = \int ydx = \frac{2}{3}xy + C$, devient $0 = 0 + C$: donc $C = 0$.

73. II. *Espace extérieur.*—L'équation de la parabole par rapport à sa convexité étant $x^2 = py$, on a donc $y = \frac{x^2}{p}$. Donc $S = \int ydx = \int \frac{x^2dx}{p} =$

$\frac{x^3}{3p} = \frac{1}{3}\frac{x^2x}{p} = \frac{1}{3}\frac{pxy}{p} = \frac{1}{3}xy$. Donc l'espace parabolique extérieur A*omi* est égal au tiers du rectangle formé par l'abscisse et l'ordonnée.

74. III. *Espace compris entre deux ordonnées.*

Soit cet espace *mnp*P ; soit AP $= a$, P$p = v$,

$m\mathrm{P} = b$, $np = y$; alors Ap ou $x = a + v$. Donc $y = \sqrt{px} = \sqrt{pa + pv}$. La différentielle de cet espace étant ydv, on aura sa surface $S = \int ydv = \int \sqrt{pa + pv} \times dv$. Soit $pa + pv = z$; différentiant on a $pdv = dz$; donc $dv = \frac{dz}{p}$.... Donc

$$S = \int ydv = \int \sqrt{pa + pv} \times dv = \int \frac{\sqrt{z}\, dz}{p} =$$

$$\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} p} + C = \frac{2}{3} \frac{z\sqrt{z}}{p} + C = \frac{2}{3} \frac{pa + pv}{p} \sqrt{pa + pv} + C =$$

$$\frac{2}{3} (a + v) \sqrt{pa + pv} + C.$$

Pour déterminer cette constante C, soit $x = 0$. Alors l'espace mnpP, représenté par $S = \int ydv$, devient aussi 0. .... Donc alors $0 = \frac{2}{3} a \sqrt{pa} + C$; donc $C = -\frac{2}{3} a \sqrt{pa}$. Donc enfin

$S = \frac{2}{3} (a + v) \sqrt{pa + pv} - \frac{2}{3} a \sqrt{pa}$,

ou $\frac{2}{3} x \sqrt{px} - \frac{2}{3} a \sqrt{pa}$, ou $\frac{2}{3} xy - \frac{2}{3} ab$.

Et effectivement $\frac{2}{3} xy$ représente l'espace AinpA, et $\frac{2}{3} ab$, l'espace AimPA ; mais AinpA — AimPA = l'espace mnpP, compris entre les deux ordonnées mP et np.

75. Triangle.—La même formule peut servir

à faire trouver la surface d'un triangle, quoique ce soit une figure rectiligne.

Soit en effet le triangle ABC (Fig. 1ère.), rectangle en A. On a la proportion 1 : tan. C :: AC : AB ; d'où AB = tan C × AC. Soit AC = x, AB = y, tan C = b. Donc $y = bx$, et $b = \frac{y}{x}$. La surface $S = \int ydx = \int bxdx = \frac{bx^2}{2}$: et substituant la valeur de b, ... $S = \frac{x^2y}{2x} = \frac{xy}{2}$, c'est-à-dire que la surface est égale au demi-produit de la base par la hauteur, comme on le démontre dans la géométrie élémentaire.

76. Cercle.—I. *En comptant les abscisses de l'origine du diamètre.*—Soit le diamètre = 1. Alors l'équation devient $y^2 = x - x^2$; donc $y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc la surface $S = \int ydx = \int (x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$ (*)

$$\int x^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \&c. \right] dx =$$

(*) Voyez V, note A.

$$\int\left(x^{\frac{1}{2}}dx - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2} - \frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{8} - \frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{16} - \&c.\right) =$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{28} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{72} - \&c.$$

En supposant $x =$ le diamètre 1, on aura la surface du demi-cercle $= \frac{2}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{28} - \frac{1}{72} - \&c.$, et en doublant, celle du cercle entier.

77.—II. *En comptant les abscisses du centre.*— Soit alors le rayon $= 1$. On a donc l'équation $y^2 = 1 - x^2$, et $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc la surface S, correspondante à l'abscisse x, $= \int y dx = \int (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$ (*)

$$\int\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5\,x^8}{128} - \frac{7\,x^{10}}{256} - \&c.\right) dx =$$

$$\int\left(dx - \frac{x^2dx}{2} - \frac{x^4dx}{8} - \frac{x^6dx}{16} - \frac{5\,x^8dx}{128} - \frac{7\,x^{10}dx}{256} - \&c.\right) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{112} - \frac{5\,x^9}{1152} - \frac{7\,x^{11}}{2816} - \&c.$$

Supposant $x =$ le rayon 1, on a pour la surface du

(*) Voyez III, note A.

quart de cercle, $S = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{5}{1152}$

$- \frac{7}{2816} -$ &c., et, en quadruplant, celle du cercle entier.

78. Ellipse.—En comptant les abscisses depuis le centre, l'équation est $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$,

d'où $y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ .... Donc la surface $S = \int y dx =$

$\int \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx =$ (*) $\int \frac{b}{a} a \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^4}{8a^4}\right.$

$\left. - \frac{x^6}{16a^6} - \frac{5x^8}{128a^8} - \text{\&c.}\right) dx =$

$\int b \left(dx - \frac{x^2 dx}{2a^2} - \frac{x^4 dx}{8a^4} - \frac{x^6 dx}{16a^6} - \frac{5x^8 dx}{128a^8} - \text{\&c.}\right) =$

$b \left(x - \frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^5}{40a^4} - \frac{x^7}{112a^6} - \frac{5x^9}{1152a^8} - \text{\&c.}\right).$

En remplaçant x par a dans cette série, on aura la

(*) Voyez VII, note A.

surface du quart de l'ellipse, et, en quadruplant, celle de l'ellipse entière.

79. Hyperbole.—*Espaces asymptotiques.* — (Fig. 7e.) Soit AB $= g$, BP $= x$; donc AP $= g + x$. Dans l'hyperbole équilatère, les asymptotes sont perpendiculaires l'une à l'autre. L'équation ordinaire de l'hyperbole par rapport aux asymptotes est $xy = g^2$. Ici x ou AP $= g + x$; donc l'équation devient .... $(g + x)\, y = g^2$: donc y ou MP $= \dfrac{g^2}{g + x}$.

Donc la surface de l'espace BCMP, ou $S = \int y dx =$

$\int g^2 \dfrac{dx}{g + x} = g^2 \log (g + x) + C$. .... Quand BP $= x$ devient 0, l'espace BCMP ou $S = 0$ aussi. Donc $0 = g^2 \log. g + C$: donc $C = - g^2 \log. g$ ... Donc $S = g^2 \log. (g + x) - g^2 \log. g$.

Soit maintenant AB ou $g = 1$: alors ....

$S = \log\ (1 + x) - \log. 1 = \log\ (1 + x) - 0 = \log (1 + x)$. Donc l'espace BCMP $= \log.$ AP. On aura de même BCMP $= \log.$ AP′, &c. Donc BCMP : BCM′P′ : : log. AP : log. AP′; c'est-à-dire que les aires asymptotiques BCMP, BCM′P′, dans une hyperbole équilatère, sont proportionnelles aux logarithmes népériens des abscisses correspondantes AP, AP; d'où il suit que si les abscisses

sont en progression par quotient, les aires correspondantes sont en progression par différence.

80. On peut de même en variant l'angle des asymptotes obtenir une infinité d'autres systèmes de logarithmes. En effet, soit UMV (Fig. 8e.) une hyperbole quelconque. Soit toujours AB = 1. La différentielle de l'espace BCMP est le petit trapèze PM*mp*, ou le petit parallélogramme PM*np*. Menant *po* perpendiculaire sur PM, dans le triangle rectangle *po*P, on aura la proportion

1 : P*p* : : sin oP*p* : *po* = P*p*.sin XAY = dx. sin A, appelant A l'angle des asymptotes. Donc le parallélogramme PM*np* = PM × *po* = ydx. sin A.

Mais $y = \frac{1}{1+x}$. Donc l'espace BCMP, ou $S =$

$$\int \frac{dx}{1+x} \sin A = \log (1+x) \sin A = \log. \text{ AP. } \sin A$$

On peut regarder sin A comme module.

Dans le système des logarithmes ordinaires, le module ou sin A = 0,434294419 : l'angle qui a ce nombre pour sinus, le rayon étant 1, est de 25 44′ 25,″ 47 : tel est l'angle que doivent former les asymptotes d'une hyperbole pour que chaque aire asymptotique soit le logarithme tabulaire de l'abscisse correspondante.

81. Cycloïde.—Soit l'axe BR de la cycloïde, (Fig. 9e.) ou le diamètre du cercle générateur = 1;

soit BP $= x$; mP $= \sqrt{x - x^2}$; soit fP $= y$: $fn = dx$ et $ln = dy$. Les deux cordes ft et Bm sont égales et parallèles, et l'arc infiniment petit lf peut être regardé comme le prolongement de la tangente ft. Donc les deux triangles lfn, mBP ont leurs côtés correspondants parallèles ; donc ils sont semblables. Donc on a la proportion

BP: Pm : : fn : ln, ou x: $\sqrt{x - x^2}$: : dx : dy = $\frac{\sqrt{x - x^2} \times dx}{x}$. Or, par rapport à l'espace extérieur ADBA, l'abscisse Bh ou $x' = f$P ou y, et l'ordonnée hf ou $y' =$ Bp ou x. Donc l'espace B hf ou

$S = \int y'dx'$ devient $S = \int xdy = \int (x - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$

= par conséquent l'espace circulaire BmP (76).

Donc de même l'espace extérieur ABDA tout entier = le demi-cercle générateur BmRB.

Or ce demi-cercle = BmR $\times \frac{\text{BR}}{4} = \frac{cr}{4}$; donc l'espace cycloïdal extérieur ABDA = aussi $\frac{cr}{4}$. Mais le rectangle entier BDAR = AR $\times$ BR = BmR $\times$ BR = $\frac{c}{2} \times 2r = cr$. Donc l'espace

intérieur BARB $= \frac{3}{4}\,cr$. Donc il est triple du demi-cercle BmRB $= \frac{cr}{4}$. Donc l'espace cycloïdal ABCA tout entier est triple de la surface dn cercle générateur.

ARTICLE DEUXIÈME.

RECTIFICATION DES COURBES.

82. *Rectifier* une ligne courbe, c'est déterminer sa longueur, ou assigner une ligne droite qui lui soit égale, ou qui soit égale à un arc proposé de cette courbe.

83. Problème.—*Rectifier une courbe algébrique quelconque.*

Solution.—Soit l'arc A$m = s$ (Fig. 1ère.) La différentielle est $mn = ds$. Le triangle rectangle mnR donne l'équation $mn = \sqrt{m\mathrm{R}^2 + n\mathrm{R}^2}$ ou

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Il suffit de substituer dans cette formule la valeur de dx, ou celle de dy, tirée de l'équation de la courbe, et d'intégrer, pour avoir la valeur de l'arc s.

Applications de cette formule.

84. Parabole.—L'équation de cette courbe étant $y^2 = px$, on aura, en la différentiant, ...

$$2\,ydy = pdx\ ;\ \text{donc}\ dx = \frac{2ydy}{p}\ ;\ \text{donc}\ dx^2 = \frac{4\,y^2dy^2}{p^2}.$$

Donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dy^2 + \frac{4\,y^2dy^2}{p^2}} =$

$\sqrt{\frac{p^2dy^2 + 4\,y^2dy^2}{p^2}} = \frac{dy}{p}(p^2 + 4\,y^2)^{\frac{1}{2}}$. En réduisant

$(p^2 + 4\,y^2)^{\frac{1}{2}}$ en série, par la formule de Newton (*),

on obtient $p + \frac{2\,y^2}{p} - \frac{2\,y^4}{p^3} + \frac{4\,y^6}{p^5} - \frac{10\,y^8}{p^7} + \&c.$

Multipliant chaque terme de cette série par $\frac{dy}{p}$, on

(*) Voyez VIII, note A.

trouve $ds = dy + \frac{2\,y^2dy}{p^2} - \frac{2\,y^4dy}{p^4} + \frac{4\,y^6dy}{p^6} -$

$\frac{10\,y^8dy}{p^8} +$ &c. .... Donc, en intégrant, ...

$$s = y + \frac{2\,y^3}{3\,p^2} - \frac{2\,y^5}{5\,p^4} + \frac{4\,y^7}{7\,p^6} - \frac{10\,y^9}{9\,p^8} + \text{\&c.}$$

85. Cercle.—I. *En comptant les abscisses de l'origine du diamètre,*—Soit le diamètre $= 1$. L'équation est alors $y^2 = x - x^2$; d'où $y = \sqrt{x - x^2}$:

donc $dy = \frac{dx - 2\,xdx}{\sqrt{x - x^2}}$. Donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$$\sqrt{dx^2 + \frac{dx^2 - 4\,xdx^2 + 4\,x^2dx^2}{4\,x - 4\,x^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{4\,xdx^2 - 4\,x^2dx^2 + dx^2 - 4\,xdx^2 + 4\,x^2dx^2}{4\,x - 4\,x^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{dx^2}{4\,x - 4\,x^2}} = \frac{dx}{2}\sqrt{\frac{1}{x - x^2}} = \frac{dx}{2}(x - x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

(*) $\frac{dx}{2}x^{-\frac{1}{2}}(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \text{\&c.}) =$

(*) Voyez VI, note A.

$$\tfrac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}dx + \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}dx + \tfrac{3}{8}x^{\frac{3}{2}}dx + \tfrac{5}{16}x^{\frac{5}{2}}dx + \tfrac{35}{128}x^{\frac{7}{2}}dx + \&c.).$$

Donc on aura, en intégrant cette série,

$$s = \tfrac{1}{2}\left(2x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{20} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{56} + \frac{35x^{\frac{9}{2}}}{576} + \&c.\right).$$

En supposant x égale au diamètre 1, et en doublant, on aura

$$\textit{Circonférence} = 2 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{3}{20} + \tfrac{5}{56} + \tfrac{35}{576} + \&c.$$

86.—II. *En comptant les abscisses du centre.*— Soit alors le rayon = 1. L'équation sera ..... $y^2 = 1 - x^2$; .... différentiant, ...

$$2\,ydy = -2\,xdx\,;\ \text{donc}\ dy = -\frac{xdx}{y} = -\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{Donc}\ ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + \frac{x2dx^2}{1-x^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{dx^2 - x^2dx^2 + x^2dx^2}{1-x^2}} = \sqrt{\frac{dx^2}{1-x^2}} =$$

$$dx\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = dx\,(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = (*)$$

(*) Voyez IV, note A.

$$dx + \frac{x^2dx}{2} + \frac{3\,x^4dx}{8} + \frac{5\,x^6dx}{16} + \frac{35\,x^8dx}{128} + \&c.$$

En intégrant cette série, on aura donc

$$s = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \frac{35\,x^9}{1152} + \&c.$$

En supposant x égale au rayon 1, on aura

$\frac{Circonf.}{4} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{3}{40} + \frac{5}{112} + \frac{35}{1152} + \&c.$, et en doublant, ...$\frac{1}{2}$ *Circonf.* $= 2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{20} + \frac{5}{56} + \frac{35}{576} + \&c.$

comme dans le problème précédent (85).

ARTICLE TROISIÈME.

QUADRATURE DE L'AIRE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION.

87. Un *solide de révolution* est un solide engendré par la révolution d'une courbe, tracée sur un plan, autour de son axe.

88. Problème.—*Trouver l'expression générale d'une suvface de révolution.* (Fig. 1ère.)

Solution.—Supposons que la courbe A*mn* fasse une révolution autour de son axe AB : elle engendrera dans ce mouvement une surface de révolution, dont l'élément ou la différentielle sera la zône décrite par l'arc infiniment petit *mn*. Or cet arc se confond sensiblement avec la partie correspondante de la tangente. Donc cette zône peut être considérée comme la surface latérale d'un cône tronqué, engendré par la rotation du trapèze P*mnp* autour de P*p*. Mais la surface latérale de ce

$$\text{cône tronqué} = \frac{\textit{Circonf.}\ \mathrm{P}m + \textit{Circonf.}\ pn}{2} \times mn.$$

Soit l'arc A$m = s$; $mn = ds$; soit AP $= x$, d'où P$p = dx$: soit P$m = y$; nR $= dy$, et $pn = y + dy$. Soit encore S la surface de révolution ; sa différentielle dS sera la surface latérale du cône tronqué. Donc $dS = \Pi\,(2\,y + dy)\,ds = 2\,\Pi\,yds + \Pi\,dyds$.

Or on peut négliger $\Pi\,dyds$, infiniment petit du second ordre. .... Donc $dS = 2\,\Pi\,yds = 2\,\Pi\,y\,\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (83). En intégrant, on aura la surface de révolution S.

Applications de cette formule.

---

89. Sphère.—L'équation du cercle étant ..... $y^2 = 2\,ax - x^2$, on aura, en la différentiant, ...

$$2\,ydy = 2\,adx - 2\,xdx\,;\ \text{d'où}\ dy = \frac{adx - xdx}{y}.$$

Donc $d\,S = 2\Pi y\,\sqrt{dx^2 + dy^2} =$

$$2\Pi y \sqrt{dx^2 + \frac{a^2dx^2 - 2\,axdx^2 + x^2dx^2}{y^2}} =$$

$$2\,\Pi\,y\,\sqrt{\frac{y^2dx^2 + a^2dx^2 - 2\,axdx^2 + x^2dx^2}{y^2}} =$$

$2\,\Pi\,dx\,\sqrt{y^2 + a^2 - 2\,ax + x^2} = 2\,\Pi\,dx\,\sqrt{a^2} = 2\,\Pi\,adx.$
Donc en intégrant, $S = 2\,\Pi\,ax + C.$ .....
Soit $x = 0$; alors $S = 0$; donc $0 = 0 + C$; donc $C = 0$.
Donc $S = 2\,\Pi\,ax$.—Soit maintenant $x = 2\,a$; alors $S = 4\,\Pi\,a^2$, surface de la sphère.

En effet, le diamètre étant $2a$, la circonférence d'un grand cercle se trouvera par la proportion $1 : \Pi :: 2\,a : 2\,\Pi\,a$; la multipliant par le diamètre $2\,a$, on aura $S = 4\,\Pi\,a^2$.

90. Cylindre.—Sa surface étant engendrée par la révolution d'un rectangle ABCD autour de l'axe AB (Fig. 10e.), soit AB $= a$, AC $= b$; l'ordonnée sera constante, et égale à AC, ou $y = b$; donc $dy = 0$.

Donc $d\,S = 2\,\Pi\,y\,\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\,\Pi\,bdx$; donc ....
$S = 2\,\Pi\,bx + C.$ Quand $x = 0$, C aussi 0.

Soit maintenant $x = a$; alors $S = 2\,\Pi\,ba$, c'est-à-dire $= 2\,\Pi\,b$, la circonférence de la base, par a, la hauteur.

91. Cône.—Ce solide étant engendré par la rotation d'un triangle rectangle ABC (Fig. 11e.) autour de l'axe AB, soit $AB = a$, $BC = b$, $AP = x$, et $PM = y$; on aura la proportion

$$AB : BC :: AP : PM, \text{ ou } a : b :: x : y;$$

donc $y = \frac{b}{a} x$: donc $dy = \frac{b}{a} dx$. Donc

$$dS = 2\Pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\Pi \frac{b}{a} x \sqrt{dx^2 + \frac{b^2}{a^2} dx^2} =$$

$$2\Pi \frac{b}{a} x \sqrt{\frac{a^2 dx^2 + b^2 dx^2}{a^2}} = 2\Pi \frac{b}{a^2} x dx \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Donc, en intégrant, $S = \Pi b \frac{x^2}{a^2} \sqrt{a^2 + b^2} + C$. Quand $x = 0$, $S = 0$; donc $C = 0$.—Mais $\sqrt{a^2 + b^2} =$ l'hypoténuse AC. Donc $S = \Pi b \frac{x^2}{a^2} \times AC$. — Soit à présent $x = a$; alors $S = \Pi b \times AC$, c'est-à-dire $= \Pi b$, la demi-circonférence de la base, par le côté AC du cône.

———oooo———

ARTICLE QUATRIÈME.

CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION.

92. Problème.—*Cuber un solide quelconque de révolution.* (Fig. 12e.)

Solution.—Si la figure mixtiligne *abo* tourne autour de son axe *ab*, elle engendrera, dans ce mouvement de rotation, la solidité d'un corps, dont l'élément ou la différentielle sera le cylindre infiniment petit *oemdino* ; or ce cylindre est égal au produit de la surface du cercle décrit par *ce*, par son épaisseur *bc*. Soit $ac = x$, $ce = y$; $bc =$ donc dx. On a la circonférence décrite par *ce*, en disant $1 : \Pi :: 2y : Circ. = 2\Pi y$. En multipliant cette circonférence par la moitié du rayon ou par $\frac{y}{2}$, on a Πy^2 pour expression de l'aire du cercle décrit par *ce*. Donc le cylindre élémentaire, ou (*en appelant* S *le solide de révolution*) $dS = \Pi y^2 dx$.

Applications de cette formule.

—

93. Paraboloïde.—L'équation de la parabole étant $y^2 = px$, on a, en substituant cette valeur de y^2 dans la formule précédente, $dS = \Pi px dx$. Donc, en intégrant, $S = \frac{\Pi px^2}{2} = \frac{\Pi xy^2}{2}$, c'est-à-dire $= \Pi y^2$, l'aire du cercle de la base, par $\frac{x}{2}$, la moitié de la hauteur du paraboloïde.

Donc la solidité d'un paraboloïde est la moitié de celle du cylindre circonscrit, qui serait égale à Πxy^2.

94. Sphère.—L'équation du cercle est $y^2 = 2ax - x^2$. Donc $dS = \Pi y^2 dx = \Pi (2ax - x^2) dx$.

En intégrant, on a $S = \Pi \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right) + C$.

Mais $C = 0$, lorsque $x = 0$.

Soit maintenant $x = 2a$; alors $S =$

$$\Pi \left(4a^3 - \frac{8a^3}{3} \right) = \Pi \left(\frac{12}{3} a^3 - \frac{8}{3} a^3 \right) = \frac{4}{3} \Pi a^3,$$

c'est-à-dire que la solidité est égale au produit de $4\,\Pi\,a^2$, la surface de la sphère (89), par $\frac{a}{3}$, le tiers de son rayon.

Cependant le volume du cylindre circonscrit serait égal au produit de la surface de sa base, c'est-à-dire de $\Pi\,a^2$, par sa hauteur $2\,a$; donc il serait égal à $2\,\Pi\,a^3$. Donc la sphère est au cylindre circonscrit, comme $\frac{4}{3} : 2$, ou comme $4 : 6$, ou comme $2 : 3$.

95. Ellipsoïde.—Dans l'ellipse,

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2\,ax - x^2)$. .... Donc $dS = \Pi\,y^2 dx =$

$\Pi\,\frac{b^2}{a^2}(2\,ax - x^2)\,dx$. Donc, en intégrant, ...

$S = \Pi\,\frac{b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C$. Or quand $x = 0$, $S = 0$,

et $C =$ aussi 0. ..... Maintenant soit $x = 2\,a$; alors

$S = \Pi\,\frac{b^2}{a^2} \times \frac{4}{3}\,a^3 = \frac{4}{3}\,\Pi\,ab^2$.

D'ailleurs, le cylindre circonscrit à l'ellipsoïde, engendrée par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe, est égal au produit de la surface du cercle de sa base (c'est-à-dire du cercle décrit par

le demi-petit axe b), par sa hauteur (c'est-à-dire par le grand axe $2a$ de l'ellipse) ; donc ce cylindre circonscrit $= \Pi b^2 \times 2a = 2 \Pi ab^2$.

Donc l'ellipsoïde est au cylindre circonscrit,

comme $\frac{4}{3} : 2$, ou : : 4 : 6, ou : : 2 : 3.

ARTICLE CINQUIÈME.

MÉTHODE INVERSE DES TANGENTES.

96. On appelle ainsi la méthode qui sert à faire trouver la nature d'une courbe, lorsqu'on connaît sa sous-tangente, sa sous-normale, sa surface, &c. Elle consiste à comparer l'expression particulière de cette sous-tangente, de cette sous-normale, &c., avec l'expression générale de la sous-tangente, de la sous-normale, &c.

97. Problème 1er.—*Trouver la courbe dont la sous-tangente* $= \frac{2y^2}{p}$.

Solution.—L'expression générale de la sous-tangente étant $s = \frac{ydx}{dy}$ .....(28), on a $\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{p}$. Donc

$pydx = 2\,y^2dy$; donc $pdx = 2\,ydy$. Intégrant, ...
$px = y^2$, équation de la parabole ordinaire.

98. Problème 2nd.—*Trouver la courbe dont la*

$$\textit{sous-tangente} = \frac{3\,y^3}{p^2}.$$

Solution.—Ici on a $\frac{3\,y^3}{p^2} = \frac{ydx}{dy}$. .... Donc

$3\,y^3dy = p^2ydx$, et $3\,y^2dy = p^2dx$. ..... Intégrant,
$y^3 = p^2x$, équation de la première parabole cubique.

99. Problème 3e.—*Trouver la courbe dont la*

$$\textit{sous-normale} = \frac{2\,x - 3\,x^2}{3\,y}.$$

Solution.—L'expression générale de la sous-normale (34) étant $u = \frac{ydy}{dx}$, on a $\frac{2\,x - 3\,x^2}{3\,y} = \frac{ydy}{dx}$.

Donc $2\,xdx - 3\,x^2dx = 3\,y^2dy$. Donc en intégrant, $x^2 - x^3 = y^3$, équation du premier cercle du second genre.

100. Problème 4e.—*Trouver la courbe dont la*

$$\textit{sous-normale} = \frac{2\,px}{3\,y}.$$

Solution.—On a ici

$$\frac{ydy}{dx} = \frac{2\,px}{3\,y}. \quad \ldots\ldots \quad \text{Donc}$$

$3\,y^2dy = 2\,pxdx$. En intégrant, $y^3 = px^2$, équation de la seconde parabole du premier genre.

101. Problème 5e.—*Trouver la courbe dont la sous-normale* $= \frac{p}{2}$.

Solution.—Alors $\frac{ydy}{dx} = \frac{p}{2}$; donc $2\,ydy = pdx$; donc en intégrant, $y^3 = px$, équation de la parabole ordinaire.

102. Problème 6e.—*Trouver la courbe dont la sous-normale* $= \frac{1 - 4\,x + 3\,x^2}{3\,y}$.

Solution.—Ici $\frac{ydy}{dx} = \frac{1 - 4\,x + 3\,x^2}{3\,y}$. .... Donc

$3\,y^2\,dy = dx - 4\,xdx + 3\,x^2dx$. Intégrant cette équation, ... $y^3 = x - 2\,x^2 + x^3 = x\,(1 - 2\,x + x^2) = x\,(1 - x)^2$, équation du second cercle du premier genre.

METHODE DES LIMITES.

ARTICLE PREMIER.—PRINCIPES.

103. Soit l'équation $y = ax$: comme y prend des valeurs différentes selon la valeur qne l'on donne à x, cette quantité x s'appelle la *principale variable*, ou la *variable indépendante*, et y, la *variable secondaire* ou *dépendante*.

104. Si, dans cette équation $y = ax$, on suppose que x reçoive un accroissement quelconque h, de manière à devenir $x + h$, et si l'on désigne par y' la nouvelle valeur qui en résultera pour y, on aura $y' = a\ (x + h) = ax + ah$. Retranchant la première équation de la seconde, il reste $y' - y = ah$; et divisant les deux membres par h, il vient $\frac{y' - y}{h} = a$: c'est-à-dire que le rapport de l'accroissement $y' - y$ de la fonction à celui h de la variable est constant, et indépendant de leurs valeurs particulières.

105. Si l'on avait la fonction un peu plus compliquée $y = ax^2$: en y mettant $x + h$ à la place de x, on obtiendrait $y' = a(x + h)^2 = ax^2 + 2axh + ah^2$. Soustrayant la première équation de la deuxième, $y' - y = 2axh + ah^2$: et divisant chaque membre par h, ... $\frac{y' - y}{h} = 2ax + ah$.—On voit ici que le rapport de l'accroissement de la fonction à cclui de la variable est formé de deux termes : l'un est indépendant de la valeur particulière de l'accroissement h, l'autre en est affecté. Ce rapport diminue d'autant plns que h diminue, et lorsqne h devient nul, ce rapport se réduit à $2ax$ .... Ce terme $2ax$ est donc la *limite* du rapport $\frac{y' - y}{h}$, puisque c'est vers ce terme que tend ce rapport à mesure que h diminue.

La différence $y' - y$ s'anéantit elle-même lorsque $h = 0$; cependant leur rapport ne s'anéantit pas, puisque dans ce cas il est égal à $2ax$.

106. De même si l'on a l'équation $y = ax^3$, $y' = a(x + h)^3 = ax^3 + 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$: donc $\frac{y' - y}{h} = 3ax^2 + 3axh + ah^2$; et quand $h = 0$, c'est-à-dire quand on passe à la limite, ce rapport se réduit à $3ax^2$.

107. Cette quantité h est donc la différence entre la valeur actuelle de la variable x, et sa valeur primitive ; de même $y^l - y$ est la différence entre la valeur actuelle y^l de la fonction, et sa valeur primitive y. Quand on passe à la limite, ces deux quantités, qui deviennent nulles, se désignent respectivement par dx et dy ; ainsi l'expression

$\frac{y^l - y}{h} = 3\ ax^2 + 3axh + ah^2$ devient alors .....

$\frac{dy}{dx} = 3\ ax^2$ ..... ($\mathcal{N}$). Le rapport $\frac{dy}{dx}$ s'appelle le *coefficient différentiel* de la fonction y.

Dans l'équation ($\mathcal{N}$), ôtant le diviseur dx, on a $dy = 3\,ax^2dx$. Cette quantité $3\,ax^2dx$ est ce qu'on appelle la *différentielle* de la fonction y.

108. Soit $y = (x^2 - 2\,a^2)\,(x^2 - 3\,a^2)$. En effectuant la multiplication, on a .....
$y = x^4 - 5\,a^2\,x^2 + 6\,a^4$. Mettant $x + h$ à la place de x, ... $y^l = x^4 + 4\,x^3h + 6\,x^2h^2 + 4\,xh^3 + h^4 - 5\,a^2\,x^2 - 10\,a^2xh - 5\,a^2h^2 + 6\,a^4$. .... Donc
$y^l - y = 4\,x^3h + 6\,x^2h^2 + 4\,xh^3 + h^4 - 10\,a^2xh - 5\,a^2h^2$; et en ordonnant par rapport à h, ...
$y^l - y = (4\,x^3 - 10\,a^2\,x)\,h + (6\,x^2 - 5\,a^2)\,h^2 + 4\,xh^3 + h^4$. Donc

$$\frac{y^l - y}{h} = 4\,x^3 - 10\,a^2\,x + (6\,x^2 - 5\,a^2)\,h + 4\,xh^2$$

$+ h^3$.... Passant à la limite, le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 10a^2x$: et la différentielle de la fonction y, ou $dy = (4x^3 - 10a^2x)\,dx$.

109. *Différentielles successives.*—Soit y une fonction de x : en la différentiant, on obtient un résultat de la forme pdx. Si p contient x, on trouvera, en différentiant p, un résultat représenté par qdx : en différentiant q à son tour, il viendra un résultat de la forme rdx, et ainsi de suite. Ces quantités pdx, qdx, rdx, &c. s'appellent les *différentielles successives* de la fonction y.

Par exemple, soit l'équation $y = ax^3$. Différentiant, on a $dy = 3ax^2dx$. Donc le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$ ou $p = 3ax^2$. Le différentiant à son tour, il vient $dp = 6axdx$. Donc $\frac{dp}{dx}$ ou $q = 6ax$.

Différentiant de nouveau, $dq = 6adx$; ..... et $\frac{dq}{dx}$ ou $r = 6a$.

Comme on obtient q en différentiant p ou $\frac{dy}{dx}$,

et en divisant ensuite par dx, on fait $q = \frac{d^2y}{dx^2}$; ....

de même $r = \frac{d^3y}{dx^3}$, et ainsi de suite.

ARTICLE DEUXIÈME.

THÉORÈMES DE MAC-LAURIN ET DE TAYLOR.

110. Théorème de Mac-Laurin.—Soit y une fonction de x. Faisons

$$y = A + B\,x + C\,x^2 + D\,x^3 + E\,x^4 + \&c. \quad (*) \qquad (K)$$

Différentiant, et divisant par dx, on a (109)

$$\frac{dy}{dx} = B + 2\,Cx + \quad 3\,Dx^2 + \quad 4\,Ex^3 + \&c.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \ldots\ 2\,C + 2.\ 3\,Dx + \ 3.\ 4\,Ex^2 + \&c.$$

(*) Voyez note C.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2.\ 3\ \mathrm{D} + 2.\ 3.\ 4\ \mathrm{E}x + \&c.$$

&c.

Désignant

par (y) ce que devient y, quand $x = 0$;

par $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ce que devient $\frac{dy}{dx}$, quand $x = 0$;

par $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ce que devient $\frac{d^2y}{dx^2}$, quand $x = 0$, &c.;

on a, par les équations précédentes,

$$(y) = \mathrm{A} \ldots\ \left(\frac{dy}{dx}\right) = \mathrm{B} \ldots\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = 2\ \mathrm{C} \ldots$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 2.\ 3\ \mathrm{D} \ldots\ \&c.;$$

d'où $\mathrm{A} = (y) \ldots\ \mathrm{B} = \left(\frac{dy}{dx}\right) \ldots\ \mathrm{C} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \ldots$

$$\mathrm{D} = \frac{1}{2.\ 3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) \ldots\ \&c.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (K), elle devient

$$y = (y) + \left(\frac{dy}{dx}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) x^2 +$$

$$\frac{1}{2.\ 3}\left\{\frac{d^3y}{dx^3}\right\}x^3 + \&c. \quad (G);$$

telle est la formule de Mac-Laurin, ou selon d'autres, de Stirling.

Applications de cette formule.

111.—I. Soit proposée l'équation $y = \frac{1}{a+x}$ ....

Différentiant (15), $dy = -\frac{dx}{(a+x)^2}$ ..... d'où

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(a+x)^2}$; .... différentiant encore, ...

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\,(a+x)}{(a+x)^4} = \frac{2}{(a+x)^3}$ ..... De même, ...

$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{2.\ 3\,(a+x)^2}{(a+x)^6} = -\frac{2.\ 3}{(a+x)^4}$, ... et ainsi de suite.—Faisant $x = 0$ dans toutes ces équations, on trouve $(y) = \frac{1}{a}$ .... $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{1}{a^2}$ .... $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{2}{a^3}$ .... $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\frac{2.\ 3}{a^4}$, &c. Substituant ces va-

leurs et celle de y, dans la formule (G), on obtient

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \&c.$$

112.—II. Soit $y = \log.\ (a+x)$.... Différentiant

(17), ... $dy = \dfrac{dx}{a+x}$; d'où $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{a+x}$. .... Donc ....

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(a+x)^2} \ldots \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2}{(a+x)^3} \ldots \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{2.\ 3}{(a+x)^4},$$

&c. Faisant $x = 0$, ... alors .....

$$(y) = \log a \ldots \left\{\frac{dy}{dx}\right\} = \frac{1}{a} \ldots \left\{\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = -\frac{1}{a^2}$$

$$\ldots \left\{\frac{d^3y}{dx^3}\right\} = \frac{2}{a^3} \ldots \left\{\frac{d^4y}{dx^4}\right\} = -\frac{2.\ 3}{a^4}, \text{ \&c. ;}$$

et en substituant dans la formule (G)

$$\log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2\,a^2} + \frac{x^3}{3\,a^3} - \frac{x^4}{4\,a^4} + \&c.$$

Si $a = 1$, alors on a (*) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} +$

(*) Voyez note B, Problème.

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c.$$

113.—III. Soit $y = \sin(x + a)$. Différentiant, (20), $dy = \cos(x + a)\, dx$; donc $\frac{dy}{dx} = \cos(x + a)$ ....

Conséquemment (21), $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin(x + a)$

.... $\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos(x + a)$ .... $\frac{d^4y}{dx^4} = \sin(x + a)$ .....

$\frac{d^5y}{dx^5} = \cos(x + a)$ .... &c.

Soit maintenant $x = 0$: alors $(y) = \sin a$ ....

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \cos a$ .... $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = -\sin a$ ....

$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = -\cos a$ .... $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right) = \sin a$ ....

$\left(\frac{d^5y}{dx^5}\right) = \cos a$ .... &c.

Donc, d'après la formule (G),

$$\sin(x + a) = \sin a + \cos a \frac{x}{1} - \sin a \frac{x^2}{1.2} -$$

$$\cos a \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \sin a \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cos a \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.5} - \&c.$$

Faisons à présent $a = 0$; alors $\sin a = 0$; et $\cos a = 1$;

$$\text{donc } \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.\,2.\,3} + \frac{x^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \&c. \quad (*)$$

114.—IV. Soit $y = (a + x)^m$ .... On en tire ....

$dy = m\,(a + x)^{m-1}\,dx$; d'où $\frac{dy}{dx} = m\,(a + x)^{m-1}$; ....

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m\,(m - 1)\,(a + x)^{m-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m\,(m - 1)\,(m - 2)\,(a + x)^{m-3} \ldots. \ \&c. \ \ldots\ldots\ldots$$

Donc si $x = 0$, $(y) = a^m$ .... $\left(\frac{dy}{dx}\right) = m\,a^{m-1}$ ....

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = m\,(m - 1)\,a^{m-2} \quad \ldots\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = m\,(m - 1)\,(m - 2)\,a^{m-3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \&c.$$

La formule (G) donne alors

(*) Voyez note C, IV, Problème 1er.

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.\,2}a^{m-2}x^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\,2.\,3}a^{m-3}x^3 + \&c.,$$

formule du binome de Newton (27).

115. Lemme.—Si, dans une fonction y de x, la variable x se change en $x+h$, on a le même coefficient différentiel lorsque x est variable et h constant, que lorsque h est variable et x constant.

En effet si dans l'équation $y = fx$ (8), on fait $x = x+h$, et si l'on a alors $y' = f(x+h)$, par la différentiation on obtient $dy' = f(x+h)\,d(x+h)$ (D). Si dans cette équation on suppose x variable et h constant, on aura

$$dy' = f(x+h)\,dx\ ;\ \text{d'où}\ \frac{dy'}{dx} = f(x+h) \quad (E).$$

Si au contraire on suppose h variable et x constant,

$$dy' = f(x+h)\,dh\ ;\ \text{d'où}\ \frac{dy'}{dh} = f(x+h) \quad (F).$$

De la comparaison des deux équations (E) et (F) on doit conclure que $\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}$, c'est-à-dire que ces coefficients différentiels sont égaux: c. q. f. d.—

De même $\frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y'}{dh^2}$ .... &c.

116. Théorème de Taylor.—Soit y une fonction de x ; et soit y' une fonction de $x + h$. En examinant les fonctions de $x + h$ contenues dans les nos. 104,105,106 et 108, on verra que l'on peut supposer

$$y' = y + Ah + Bh^2 + Ch^3 + Dh^4 + \&c. \quad (H),$$

A, B, C, &c. étant des fonctions inconnues de x qu'il s'agit de déterminer.

Différentiant donc par rapport à h, et divisant par dh,

$$\frac{dy'}{dh} = A + 2\,Bh + 3\,Ch^2 + 4\,Dh^3 + \&c. \quad (I)\,;$$

différentiant de même l'équation (H) par rapport à x, et divisant par dx, on aura

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dA}{dx}h + \frac{dB}{dx}h^2 + \frac{dC}{dx}h^3 + \&c. \quad (J).$$

Les premiers membres de ces deux équations étant égaux (115), les seconds membres doivent l'être aussi : égalant donc (*) entre eux les coefficients des mêmes puissances de h, on trouvera

(*) Voyez note C.

$$A = \frac{dy}{dx} \ldots\ldots B = \frac{dA}{2\,dx} = \frac{1}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2} \ldots\ldots C = \frac{dB}{3\,dx} = \frac{1}{2.3}\,\frac{d_3y}{dx3}$$

.... &c. Mettant ces valeurs dans l'équation (H), on a

$$y' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\,\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{1.\,2.\,3} + \&c. \quad (T),$$

ce qui est la formule de Taylor.

117. C'est sur ce théorème què Lagrange a basé sa méthode, mais il y parvient par des considérations purement algébriques, et sans recourir aux limites, ou aux infiniment petits.

Applications de cette formule.

—

118.—I. Soit $y = \sqrt{x}$ .... et $y' = \sqrt{x+h}$ .... Donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \ldots\ldots \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{4}\,x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3}{8}\,x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}\,\frac{1}{\sqrt{x^5}} \ldots\ldots \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{15}{16}\,x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}\,\frac{1}{\sqrt{x^7}}$$

.... &c. Substituant ces valeurs dans la formule (T), on a

$$\sqrt{x+h}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{\sqrt{x^5}} \text{ \&c.}$$

119.—II. Soit $y=\cos x$ .... et $y'=\cos(x+h)$....
Donc (20, 21)

$$\frac{dy}{dx}=-\sin x \ldots \frac{d^2y}{dx^2}=-\cos x \ldots \frac{d^3y}{dx^3}=\sin x \ldots\ldots$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\cos x \ldots \frac{d^5y}{dx^5}=-\sin x \ldots\ldots \text{ \&c.}$$

Substituant dans la formule de Taylor, on obtient

$$\cos(x+h)=\cos x-\sin x\frac{h}{1}-\cos x\frac{h^2}{1.\,2}+$$

$$\sin x\frac{h^3}{1.\,2.\,3}+\cos x\frac{h^4}{1.\,2.\,3.\,4}-\sin x\frac{h^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

— &c....—Soit $x=0$ .... alors $\sin x=0$, et $\cos x=1$

$$\text{Donc } \cos h=1-\frac{h^2}{1.2}+\frac{h^4}{1.\,2.\,3.\,4}-\text{\&c.}$$

120.—III. Soit $y=\sin x$ .... et $y'=\sin(x+h)$. Donc

$$\frac{dy}{dx}=\cos x \ldots \frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x \ldots \frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x \ldots$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\sin x \ldots \frac{d^5y}{dx^5}=\cos x \ldots \text{ \&c. ....}$$ En substituant,

$$\sin(x+h) = \sin x + \cos x \frac{h}{1} - \sin x \frac{h^2}{1.2} -$$

$$\cos x \frac{h^3}{1.\,2.\,3} + \sin x \frac{h^4}{1.\,2.\,3.\,4} + \cos x \frac{h^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}$$

— &c. .... (U),

ou, en mettant $\sin x$ et $\cos x$ en évidence,

$$\sin(x+h) = \sin x \left(1 - \frac{h^2}{1.\,2} + \frac{h^4}{1.\,2.\,3.\,4} - \text{\&c.}\right)$$

$$+ \cos x \left(h - \frac{h^3}{1.\,2.\,3} + \frac{h^5}{1.2.3.4.5} - \text{\&c.}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (V).$$

Soit maintenant $x = 0$; l'équation (U) devient

$$\sin h = h - \frac{h^3}{1.\,2.\,3} + \frac{h^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \text{\&c.} \quad (113)$$

Substituant dans l'équation (V), on a donc (119)
$\sin(x+h) = \sin x \cos h + \sin h \cos x$.

121. Pour l'application de la Méthode des Limites à la détermination des *points singuliers* des courbes, à celle des *courbes osculatrices*, &c., on peut consulter les Traités de Lacroix, Boucharlat, Hind, &c.

FIN.

NOTES.

NOTE A.

Du Binome de Newton.

Le no. 27, page 20, contient une démonstration de la formule suivante, due à Newton :

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} a^{m-2} b^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3 + \&c.;$$

ou

$$(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} \frac{a^m}{a} b + \frac{m(m-1)}{1.\ 2} \frac{a^m}{a^2} b^2 +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3} \frac{a^m}{a^3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$$

$$\frac{a^m}{a^4} b^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} \frac{a^m}{a^5} b^5 + \&c.$$

ou

$$(a+b)^m = a^m \left(1 + \frac{m}{1}\frac{b}{a} + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}\frac{b^2}{a^2} + \right.$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}\frac{b^3}{a^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\frac{b^4}{a^4} +$$

$$\left. \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\frac{b^5}{a^5} + \&c.\right). \ (P).$$

Applications de cette formule.

I. Développer $(a+x)^{-1}$ ....

Ici $b = x$, et $m = -1$ .... Donc d'après la formule (P),

$$(a+x)^{-1} = a^{-1}\left(1 - 1\frac{x}{a} + 1\frac{x^2}{a^2} - 1\frac{x^3}{a^3} + \right.$$

$$\left. 1\frac{x^4}{a^4} - \&c.\right) = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} - \&c.\right) =$$

$$\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \&c.$$

II. Développer $(1 + x^2)^{-1}$.

Alors $a = 1$, $b = x^2$, et $m = -1$. Donc, selon la formule (P),

$$(1 + x^2)^{-1} = 1^{-1}\left(1 - 1\frac{x^2}{1} + 1\frac{x^4}{1} - 1\frac{x^6}{1} + \&c.\right) =$$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \&c.$$

III. Développer $(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

$a = 1$, $b = -x^2$, et $m = \frac{1}{2}$. La formule (P) donne alors

$$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{1} - \frac{1}{16}\frac{x^6}{1} - \right.$$

$$\left. \frac{5}{128}\frac{x^8}{1} - \frac{7}{256}\frac{x^{10}}{1} - \&c.\right) =$$

$$1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{16} - \frac{5\,x^8}{128} - \frac{7\,x^{10}}{256} - \&c.$$

IV. Développer $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$a = 1$, $b = -x^2$, $m = -\frac{1}{2}$. Donc

$$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{x^4}{1} + \right.$$

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{x^6}{1}+\&c.)=$$

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}x^6+\&c.=$$

$$1+\frac{x^2}{2}+\frac{3\,x^4}{8}+\frac{5\,x^6}{16}+\frac{35\,x^8}{128}+\&c.$$

V. Développer $(x-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Alors $a=x, b=-x^2$, et $m=\frac{1}{2}$. Donc, par la formule (P),

$$(x-x^2)^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{x^2}{x}-\frac{1}{8}\frac{x^4}{x^2}-\frac{1}{16}\frac{x^6}{x^3}-\right.$$

$$\left.\frac{5}{128}\frac{x^8}{x^4}-\frac{7}{256}\frac{x^{10}}{a^5}-\&c.\right)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5\,x^4}{128}-\frac{7\,x^5}{256}-\&c\right).$$

VI. Développer $(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Ici $a=x, b=-x^2$, $m=-\frac{1}{2}$. Donc (IV),

$$(x-x^2)^{-\frac{1}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3+\right.$$

$$\left.\frac{35}{128}x^4+\&c.\right).$$

VII. Développer $(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

$a = a^2$, $b = -x^2$, $m = \frac{1}{2}$. Donc

$$(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = (a^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{x^4}{a^4} - \frac{1}{16}\frac{x^6}{a^6} - \frac{5}{128}\frac{x^8}{a^8} - \&c.\right) =$$

$$a \left(1 - \frac{x^2}{2\,a^2} - \frac{x^4}{8\,a^4} - \frac{x^6}{16\,a^6} - \frac{5\,x^8}{128\,a^8} - \&c.\right).$$

VIII. Développer $(p^2 + 4\,y^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ici $a = p^2$, $b = 4\,y^2$, et $m = \frac{1}{2}$. Donc, par la formule (P),

$$(p^2 + 4\,y^2)^{\frac{1}{2}} = (p^2)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\frac{4\,y^2}{p^2} - \frac{1}{8}\frac{16\,y^4}{p^4} + \frac{1}{16}\frac{64\,y^6}{p^6} - \frac{5}{128}\frac{256\,y^8}{p^8} + \&c.\right) =$$

$$p \left(1 + \frac{2\,y^2}{p^2} - \frac{2\,y^4}{p^4} + \frac{4\,y^6}{p^6} - \frac{10\,y^8}{p^8} + \&c.\right) =$$

$$p + \frac{2\,y^2}{p} - \frac{2\,y^4}{p^3} + \frac{4\,y^6}{p^5} - \frac{10\,y^8}{p^7} + \&c.$$

NOTE B.

DES DIVERS SYSTÈMES DE LOGARITHMES.

On sait que les logarithmes en général sont des exposants en progression par différence (ou arithmétique) de termes en progression par quotient (ou géométrique).

Il suit de cette définition qu'il y a une infinité de systèmes de logarithmes. On emploie plus particulièrement les logarithmes ordinaires, et les logarithmes naturels.

Le système des logarithmes *ordinaires* ou de Briggs est celui dans lequel 10 a 1 pour logarithme, et dont 0,4342944819 &c. est le *module.* Ce sont ceux des tables de Lalande.

Le système des logarithmes *naturels* ou de Néper (Napier) est celui dans lequel 10 a 2,30258509-2994 &c. pour logarithme, et dont le module est 1. On appelle communément ces logarithmes *hyperboliques,* à cause de l'analogie qu'ils ont avec les espaces compris, dans une hyperbole équilatère, entre l'asymptote et la courbe. (Voyez n°. 79).

Le *module* est le rapport qui existe entre les différents systèmes de logarithmes. Le système que

l'on prend pour terme de comparaison est celui des logarithmes hyperboliques, qui a 1 pour module. Ainsi on trouvera le module de tout autre système en divisant le logarithme de 10 dans ce système, par 2,302585092994 &c., logarithme hyperbolique de 10. Par exemple, le module 0,4342944819 &c. des logarithmes ordinaires s'obtient en divisant 1, logarithme tabulaire de 10, par 2,302585 &c.

On voit par là qu'ayant le logarithme hyperbolique d'un nombre, on doit, pour en avoir le logarithme ordinaire, multiplier le logarithme donné par 0,43429 &c., module des logarithmes tabulaires.

PROBLÈME.—*Trouver le logarithme de* $1 + x$.

(*) Soit $\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c.$ .... (1)

Soit $(1+x)^m = 1 + z$ ..... (2)

Soit $\log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + \&c.$ ..... (3)

Mettant les logarithmes dans l'équation (2), on a $\log.(1+x)^m$ ou $m \log(1+x) = \log(1+z)$ .... (4)

Donc, d'après les équations (1) et (3), ...

$m\,Ax + m\,Bx^2 + m\,Cx^3 + \&c. = Az + Bz^2 + Cz^3 + \&c.$ .. (5)

Mais de l'équation (2) on tire encore $z = (1+x)^m - 1$, et en développant $(1+x)^m$ par le binome de Newton,

$$z = mx + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}x^3 + \&c.$$

Substituant cette valeur de z dans l'équation (5), on a enfin

(*) Voyez note C.

$$m\,Ax + m\,Bx^2 + m\,Cx^3 + \&c. =$$

$$m\,Ax + \frac{m(m-1)}{1.\ 2}A\,x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}A\,x^3 + \&c.$$

$$+ m^2 B + m^2(m-1)\,B + \&c.$$

$$+ m^3\,C + \&c.$$

Divisant tous les termes par m,

$$Ax + Bx^2 + Cx^3 + \&c. =$$

$$Ax + \frac{m-1}{2}A\,x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2.\ 3}A\,x^3 + \&c.$$

$$+ m\,B + m(m-1)\,B + \&c.$$

$$+ m^2\,C + \&c.$$

Donc $A = A$ .... $\frac{m-1}{2}A + m\,B = B$; .... donc ....

$$m\,B - B = -\frac{m-1}{2}A;\ \text{ou}$$

$$(m-1)\,B = -(m-1)\frac{A}{2};\ \text{donc}$$

$$B = -\frac{m-1}{m-1}\frac{A}{2} = -\frac{A}{2}$$ .... On trouvera de même

$C = \frac{A}{3}$. . Substituant ces valeurs dans l'équation (1),

$$\log(1+x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \&c. =$$

$$A\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c\right).$$

A est le module. Si on le suppose égal à 1, on aura les logarithmes hyperboliques; si on le fait égal à 0,43429 &c., on aura les logarithmes ordinaires.

NOTE C.

Méthode des Coefficients indéterminés.

On sait qu'une *série* ou une *suite* est un assemblage de termes qui vont en augmentant ou en diminuant de valeur, selon une certaine loi.

La série dont les termes vont en augmentant de valeur se nomme *divergente*, et celle dont les termes décroissent s'appelle *convergente*. Une suite diverge ou converge d'autant plus rapidement, que chaque terme croît ou décroît plus sensiblement à l'égard de celui qui le précède.

La *Méthode des Coefficients indéterminés* a pour but de réduire certaines fonctions algébriques en séries.

1er. Exemple.—*Soit proposé de trouver en série la valeur de* $\frac{1}{1-x}$.

Faisons $\frac{1}{1-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ (O);

A, B, C, D, &c. étant des coefficients dont la valeur soit indéterminée, et tels qu'ils ne renferment pas x.

Otons le dénominateur du premier membre; alors

$$1 = \begin{array}{r|r|r|r} A + B & x + C & x^2 + D & x^3 + \&c. \\ -A & -B & -C & -\&c. \end{array}$$

Transposons 1 ; ....

$$0 = \begin{array}{r|r|r|r} A + B & x + C & x^2 + D & x^3 + \&c. \\ -1 - A & -B & -C & -\&c. \end{array}$$

(x est sous-entendu après $-A$; x^2, après $-B$, &c.) Puisque tout le second membre se réduit à 0, égalons chaque colonne de coefficients à 0; nous aurons

$A - 1 = 0$; donc $A = 1$;.....

$B - A = 0$; donc $B = A = 1$;

$C - B = 0$; donc $C = B = 1$;

$D - C = 0$; donc $D = C = 1$;

et ainsi de suite.

Substituons ces valeurs dans l'équation (O):

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \&c.$$

Remarque.—Voici comment on peut démontrer que dans l'équation $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ &c. chacun des coefficients A, B, C, D, &c. est nul.

En effet, cette équation devant avoir lieu, quelle que soit la valeur de x, supposons $x = 0$. Elle se réduit alors à $0 = A$: et comme A est indépendant de x, ce terme sera donc encore nul, lorsque x n'égalera pas 0. L'équation se réduit donc à

$$0 = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

Maintenant supprimons le facteur commun x ; il reste $0 = B + Cx + Dx^2 +$ &c.

Appliquant à cette équation le raisonnement précédent, nous trouverons $B = 0$; et ainsi de suite.

2nd. Exemple.—*Réduire en série* $\sqrt{1+x}$.

Soit $\sqrt{1+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c.

Elevant les deux membres au carré,

$$1+x = A^2 + 2AB\,x + \left.\begin{matrix} B^2 \\ +2AC \end{matrix}\right| x_2 + \left.\begin{matrix} 2BC \\ +2AD \end{matrix}\right| x_3 + \left.\begin{matrix} C^2 \\ +2BD \\ +2AE \end{matrix}\right| x^4 + \&c.$$

Egalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, ... $A^2 = 1$; donc $A = 1$.

$2AB = 1$; donc $B = \dfrac{1}{2A} = \dfrac{1}{2}$ .....

$$2\,AC + B^2 = 0\,;\ \text{donc}\ C = -\frac{B^2}{2\,A} = -\frac{1}{8}\ \ldots\ldots$$

$$2\,AD + 2\,BC = 0\,;\ \text{donc}\ D = -\frac{BC}{A} = \frac{1}{16}.$$

$$2\,AE + 2\,BD + C^2 = 0\,;\ \text{donc}\ 2\,AE = -2\,BD - C^2 = -\frac{1}{16} - \frac{1}{64} = -\frac{5}{64};\ \text{donc}\ E = -\frac{5}{128}.$$

Donc, en substituant dans la première équation,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5\,x^4}{128} + \&c.$$

Problèmes à resoudre.—*Réduire en séries*

I. $\dfrac{a}{a+x}$ .... II. $\dfrac{1+2\,x}{1-x-x^2}$ .... III. $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$ ....

IV. $\dfrac{a_2}{a^2+2\,ax-x^2}$ .... V. $\sqrt{1+x^2}$ ....

VI. $\sqrt{1+x+x^2+x^3+\&c.}$ .... VII. $\sqrt{a^2-x^2}$ ....

VIII. $\dfrac{a^2-x_2}{a+bx-x^2}$ .... IX. $\dfrac{1}{3\,x-x^2}$ ....

Applications de la Méthode des Coefficients indéterminés.

I. *Décomposition des fractions.*

Problème. — Soit proposé de décomposer la fraction $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}$ en la somme de deux autres fractions telles que chacune ait pour dénominateur l'un des facteurs du dénominateur de la fraction donnée.

Faisons $\frac{x^2}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} =$

en réduisant au même dénominateur,

$= \frac{Ax - Ab + Bx - Ba}{(x-a)(x-b)}$: et ôtant le dénominateur commun,

$x^2 = Ax - Ab + Bx - Ba = (A+B)x - Ab - Ba.$

Donc $A + B = x$; .... et $-Ab - Ba = 0$. De la première équation, on tire $A = x - B$; substituant dans la seconde, $-bx + Bb - Ba = 0$; donc

$$B(b-a)=bx\,;\ \text{donc } B=\frac{bx}{b-a}.$$

$$\text{Donc } A=x-B=x-\frac{bx}{b-a}=\frac{bx-ax-bx}{b-a}=$$

$$-\frac{ax}{b-a}=\frac{ax}{a-b}.$$

Donc enfin

$$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}=\frac{\frac{ax}{a-b}}{x-a}+\frac{\frac{bx}{b-a}}{x-b}=$$

$$\frac{ax}{(a-b)(x-a)}+\frac{bx}{(b-a)(x-b)}.$$

On peut s'assurer de l'exactitude de ce résultat, en réduisant le tout au même dénominateur.

Problèmes à résoudre.—*Décomposer les fractions*

I. .... $\dfrac{x+c}{(x-a)(x-b)}$ ..... II. $\dfrac{2a-x}{a^2-x^2}$.

II. *Méthode inverse des séries ou retour des suites.*

Quand la valeur d'une quantité x est exprimée en une série des puissances d'une autre y, il est sou-

vent nécessaire de trouver la valeur de la seconde quantité y en une série des puissances de la première x, et c'est ce que l'on appelle *Retour des Séries.*

On peut pour cela employer la Méthode des Coefficients indéterminés. Voici la manière d'opérer.

Supposons que l'on ait une série exprimant la valeur de x en puissances de y.

1°. On égale y à une série des puissances de x, multipliées par des coefficients indéterminés.

2°. On substitue cette valeur de x, et celle de ses différentes puissances dans la série proposée.

3° On en déduit la valeur des divers coefficients indéterminés, et on substitue cette valeur dans l'équation exprimant y en puissances de x.

Exemple.—Soit $x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 +$ &c : (R), trouver y en une série des puissances de x.

Solution.—Faisons $y = Ax + B|x^2 + C|x^3 + D|x^4 +$ &c.

On aura donc

$$
\begin{array}{lll|l|l|l}
y^2 = & A^2 & & +2AB & + B^2 & \\
 & & & & +2AC & +\&c. \\
y^3 = & & & A^3 & +3A^2B & +\&c. \\
y^4 = & & & & A^4 & +\&c.
\end{array}
$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée, on a

$$
\begin{array}{rl|l|l|l}
x = a\,\mathrm{A}x + & a\,\mathrm{B}\,x^2 + & a\,\mathrm{C}\,x_3 + & a\,\mathrm{D}\,x^4 & + \&c. \\
+ b\,\mathrm{A}_2 & + 2\,b\,\mathrm{AB} & + & b\,\mathrm{B}_2 & \\
 & & + 2 & b\,\mathrm{AC} & + \&c. \\
 & + & c\,\mathrm{A}^3 & + 3\,c\,\mathrm{A}^2\mathrm{B} & + \&c. \\
 & & + & d\,\mathrm{A}^4 & + \&c.
\end{array}
$$

D'où $a\,\mathrm{A} = 1$ .... $\mathrm{A} = \dfrac{1}{a}$.

$$a\,\mathrm{B} + b\,\mathrm{A}^2 = 0 \;....\; a\,\mathrm{B} = -\frac{b}{a^2} \;....\; \mathrm{B} = -\frac{b}{a^3}.$$

$$a\,\mathrm{C} = -2\,b\,\mathrm{AB} - c\,\mathrm{A}^3 = \frac{2\,b^2}{a^4} - \frac{c}{a^3} = \frac{2\,b^2 - ac}{a^4} \;...$$

$$\mathrm{C} = \frac{2\,b^2 - ac}{a^5}.$$

$$a\,\mathrm{D} = -b\,\mathrm{B}^2 - 2\,b\,\mathrm{AC} - 3\,c\,\mathrm{A}^2\mathrm{B} - d\,\mathrm{A}^4 =$$

$$-\frac{b^3}{a^6} - \frac{4\,b^3 - 2\,abc}{a^6} + \frac{3\,bc}{a^5} - \frac{d}{a^4} =$$

$$-\frac{5\,b^3 - 2\,abc - 3\,abc + a^2d}{a^6} \;...$$

$$\mathrm{D} = -\frac{5\,b^3 - 5\,abc + a^2d}{a^7}.$$

Substituant enfin ces valeurs de A, B, C, D, dans l'équation (R),

$$y = \frac{1}{a} x - \frac{b}{a^3} x^2 + \frac{2b_2 - ac}{a^5} x^3 -$$

$$\frac{5b^3 - 5abc + a^2d}{a^7} x^4 + \&c.$$

Problèmes à résoudre.—*Supposant*

$$\text{I. .... } x = y - y^2 + y^3 - y^4 + \&c.$$

$$\text{II. .... } x = y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \&c.$$

$$\text{III. .... } x = \frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + \&c.$$

trouver y *en puissances de* x.

III. *Démonstration générale du Binome de Newton.*

Soit $(1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c.$ (1)

et $(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c.$ (2)

Soit encore $(1+x)^{\frac{1}{n}} = u$ .... et $(1+y)^{\frac{1}{n}} = v$ ..... (3)

$$\text{Donc } u^m = (1+x)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \&c. \quad (4)$$

$$\text{et } v^m = (1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \&c. \quad (5)$$

$$\text{Donc } u^m - v^m = A(x-y) + B(x^2 - y^2) + C(x^3 - y^3) + D(x^4 - y^4) + \&c. \quad (6)$$

De plus (3)....$u^n = (1+x)^{\frac{n}{n}} = 1 + x$.... et $v^n = 1 + y$; (7)

donc $u^n - v^n = x - y$ ..... (8)

Donc, en divisant l'équation (6) par l'équation (8),

$$\frac{u^m - v^m}{u^n - v^n} = A + B(x+y) + C(x^2 + xy + y^2) + D(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \&c. \quad \text{..... (9)}$$

Divisant les deux termes de la fraction par $u - v$, on a

$$\frac{u^{m-1} + u^{m-2}v + u^{m-3}v^2 \;....\; + u\,v^{m-2} + v^{m-1}}{u^{n-1} + u^{n-2}v + u^{n-3}v^2 \;....\; + u\,v^{n-2} + v^{n-1}} \quad (*)$$

(*) En divisant $u^2 - v^2$ par $u - v$, on trouve $u + v$ pour quotient ; .... $u^3 - v^3$, par $u - v$, on a $u^2 + uv + v^2$;

$$= A + B(x+y) + C(x^2 + xy + y^2) +$$

$$D(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) + \&c. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Dans les égalités (3), soit $x = y$, alors $u = v$. Dans cette supposition, l'équation (10) devient

$$\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \&c. = \frac{mu^m}{nu^n} \quad (11)$$

(en multipliant par u les deux termes de la fraction $\frac{mu^{m-1}}{nu^{n-1}}$).

$$\frac{u^4 - v^4}{u - v} = u^3 + u^2 v + uv^2 + v^3.$$

Chaque quotient contient autant de termes qu'il y a d'unités dans le degré du dividende ; de plus l'exposant de u, dans chaque terme du quotient, est égal à ce degré du dividende, moins le rang du terme ; et celui de v est égal à ce rang diminué d'une unité.

Donc si l'on divise $u^m - v^m$ par $u - v$, on aura un nombre m de termes ; l'avant dernier, ou le terme $m - 1$, sera donc

$u^{m-m+1} v^{m-1-1} = uv^{m-2}$, et le dernier m sera $u^{m-m} v^{m-1} = v^{m-1}$. Donc enfin

$$\frac{u^m - v^m}{u - v} = u^{m-1} + u^{m-2} v + u^{m-3} v^2 \ldots + uv^{m-2} + v^{m-1}.$$

On a encore, en faisant disparaître le facteur u^n du dénominateur de la dernière fraction (11),

$$\frac{m}{n} u^m = u^n (A + 2\,Bx + 3\,Cx^2 + 4\,Dx^3 + \&c.) \ldots (12)$$

Substituant les valeurs de u^m et de u^n, tirées des équations (4) et (7), on obtient

$$\frac{m}{n} + \frac{m}{n} A \quad x + \frac{m}{n} B \quad x^2 + \frac{m}{n} C \; x^3 + \&c. =$$

$$\begin{array}{r|r|r|r} A + 2\,B & x + 3\,C & x^2 + 4\,D & x^3 + \&c. \\ + \quad A & + 2\,B & + 3\,C & + \&c. \end{array} \quad (13)$$

D'où $A = \frac{m}{n}$.

$$2\,B + A = \frac{m}{n} A \ldots\ldots 2\,B = \frac{m}{n} A - A =$$

$$A \left[\frac{m}{n} - 1 \right] = \frac{m}{n} \left[\frac{m}{n} - 1 \right] \ldots\ldots$$

$$B = \frac{\frac{m}{n} \left[\frac{m}{n} - 1 \right]}{2}.$$

$$3\,C + 2\,B = \frac{m}{n} B \ldots 3\,C = \frac{m}{n} B - 2\,B =$$

$$B\left(\frac{m}{n}-2\right)\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2}\ldots\ldots\ldots$$

$$C=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)}{2.\ 3}.$$

$$4\,D+3\,C=\frac{m}{n}\,C\ldots.\ 4\,D=\frac{m}{n}\,C-3\,C=$$

$$C\left(\frac{m}{n}-3\right)=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{2.\ 3}\ldots$$

$$D=\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{2.\ 3.\ 4}.$$

Substituant enfin ces valeurs des coefficients .... A, B, C, D, dans l'équation (1),

$$(1+x)^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}x+\frac{\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n}-1\right)}{1.\ 2}x^2+$$

$$\frac{\frac{m}{n}\left\{\frac{m}{n}-1\right\}\left\{\frac{m}{n}-2\right\}}{1.\ 2.\ 3}x^3+$$

$$\frac{\frac{m}{n}\left\{\frac{m}{n}-1\right\}\left\{\frac{m}{n}-2\right\}\left\{\frac{m}{n}-3\right\}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^4+\text{\&c.}\quad(14)$$

IV. *Problèmes de Trigonométrie.*

PROBLÈME 1er.—*Trouver la valeur du sinus d'un arc en fonction de cet arc.*

Solution.—Soit l'arc $da = s$; (Fig. 5e.) soit le sinus $ap = x$, alors $ai = ds$, et $io = dx$: soit encore le rayon $= 1$. Les deux triangles acp, aio, semblables parce que leurs côtés correspondants sont perpendiculaires, donnent la proportion

$ca : ai :: cp : io$, ou $1 : ds :: \cos s : dx = \cos s.\ ds$.

Or $\cos s = \sqrt{1 - \sin^2 s} = \sqrt{1 - x^2}$. Donc .....

$dx = \sqrt{1 - x^2} \times ds$, et $dx^2 = (1 - x^2)\, ds^2$ ..... (R)

Soit maintenant

$x = As + Bs^2 + Cs^3 + Ds^4 + Es^5 + Fs^6 + Gs^7 + \text{\&c.}$

Différentiant, $dx = (A + 2Bs + 3Cs^2 + 4Ds^3 + 5Es^4 + 6Fs^5 + 7Gs^6 + \text{\&c.})\ ds$.

Substituant ces valeurs de dx et de x dans l'équation (R), et divisant chaque membre par ds^2, on obtient

| 1er. membre. | | |

Donc $A^2 = 1$ .... $A = 1$. $4\,AB = 0$ .... $B = 0$.

$6\,AC + 4\,B^2 = -A^2$ .... $6\,AC = -1$ .... $C = -\frac{1}{6}$.

$8\,AD + 12\,BC = -2\,AB = 0$ .... $D = 0$

$10\,AE + 16\,BD + 9C^2 = -2\,AC - B^2$ .... $10\,AE =$

$-9C^2 - 2\,AC = -\frac{9}{36} + \frac{1}{3} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ .... $E = \frac{1}{120}$

$12\,AF + 20\,BE + 24\,CD = -2\,AD - 2\,BC = 0$

.... $F = 0$

$14\,AG + 24\,BF + 30\,CE + 16\,D^2 = -2\,AE -$

$2\,BD - C^2$ .... $14\,AG = -2\,AE - C^2 - 30\,CE =$

$-\frac{1}{60} - \frac{1}{36} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{360}$ .... $G = -\frac{1}{5040}$.

Donc $x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \frac{s^7}{5040} + \&c.$ ou

$$x = \frac{s}{1} - \frac{s^3}{1.\,2.\,3} + \frac{s^5}{1.\,2.\,3.\,4.\,5} - \frac{s^7}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} + \&c.$$

Problème 2nd.—*Trouver de même l'expression du sinus d'un arc en fonction de cet arc, en retournant la série trouvée au n°. 86 ....*

$$s = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3\,x^5}{40} + \frac{5\,x^7}{112} + \&c. \quad (L)$$

Solution.—Soit (*M*)

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
x = & As + & Bs^2 + & Cs^3 + & Ds^4 + & Es^5 + \&c. \\
x^3 = & & & A^3 & +3\,A^2B & +3\,AB^2 & \\
 & & & & & +3\,A^2C & + \&c. \\
x^5 = & & & & & A^5 & + \&c. \\
\hline
\end{array}$$

Donc en substituant dans l'équation donnée (*L*),

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
s = As + & Bs^2 + & Cs^3 + & Ds^4 + & Es^5 + \&c. \\
 & & +\frac{A^3}{6} & +\frac{A^2B}{2} & +\frac{AB^2}{2} & \\
 & & & & +\frac{A^2C}{2} & + \&c. \\
 & & & & +\frac{3\,A^5}{40} & + \&c. \\
\hline
\end{array}$$

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = -\frac{A^3}{6} = -\frac{1}{6} \quad = D\ 0$$

$$E = -\frac{A^2C}{2} - \frac{3\,A^5}{40} = \frac{1}{12} - \frac{3}{40} = \frac{1}{120}.$$

Donc $x = s - \frac{s^3}{6} + \frac{s^5}{120} - \&c.$, comme dans le problème précédent.

FIN DES NOTES.

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \&c. \quad (41)$$

Solution — (42)

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \&c.$$

$z =$	A	$+ 2A'B$	$+ 2A'C$	$+ \&c.$
			$+ 2A'C$	$+ \&c.$
$z' =$		A'	$+ 2A'B$	$+ \&c.$

Ici on substituera dans l'équation donnée (44)

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c.$$

	$\frac{A^2}{6}$	$+ \frac{A'B}{6}$	$+ \frac{A'B}{6}$	
			$+ \frac{A'C}{6}$	$+ \&c.$
			$+ \frac{3A'}{6}$	$+ \&c.$

$$A = 1 \quad B = 0 \quad C = -\frac{A^2}{6} = -\frac{1}{6} = D \quad 0$$

$$E = +\frac{A^2C}{6} - \frac{3A'}{6} = \frac{1}{18} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{180}$$

Donc $z = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + \&c.$ comme dans la problème précédent.

FIN DES NOTES.

TABLE DES MATIÈRES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Chapitre I. Principes 1
Article 1. Définitions ..... *ib.*
Article 2. Différentiation des fonctions algébriques 3
Article 3. Applications des Règles précédentes. 8
Article 4. Différentiation des fonctions transcendantes 13
§ 1. Fonctions logarithmiques ..... *ib.*
§ 2. Fonctions exponentielles 15
§ 3. Fonctions trigonométriques 16
Chapitre II. Applications 20
Article 1. Démonstration de la formule de Newton ..... *ib.*
Article 2. Sous-tangentes 22
Article 3. Sous-normales 25
Article 4. *Maxima* et *minima* 27

CALCUL INTÉGRAL.

Chapitre I. Principes 37
Article 1. Définitions ..... *ib.*

Article 2. Intégration des quantités différentielles à une seule variable 38
§ 1. Différentielles monomes ..... *ib.*
§ 2. Différentielles polynomes qui peuvent s'intégrer par la règle fondamentale d'intégration 39
§ 3. Différentielles qui s'intègrent par arcs de cercle 41
§ 4. Intégration par les séries 42
Article 3. Intégration des quantités différentielles à plusieurs variables 47
Chapitre II. Applications 49
Article 1. Quadrature des courbes ..... *ib.*
Article 2. Rectification des courbes 59
Article 3. Quadrature de l'aire des solides de révolution 63
Article 4. Cubature des solides de révolution . 67
Article 5. Méthode inverse des tangentes 70

MÉTHODE DES LIMITES.

Article 1. Principes 73
Différentielles successives 76
Article 2. Théorème de Mac-Laurin; applications 77
Théorème de Taylor et applications 84

NOTES.

Note *A*. Du Binome de Newton 89
Note *B*. Des divers systèmes de logarithmes. 94
Note *C*. Méthode des Coefficients indéterminés 97

Applications de la Méthode des Coefficients indéterminés 101
I. Décomposition des fractions ..... *ib.*
II. Méthode inverse des séries, ou Retour des suites 102
III. Démonstration générale du Binome de Newton 105
IV. Problèmes de Trigonométrie. 110

FIN DE LA TABLE.

N. B. Par suite de la difficulté que l'on éprouve ici à se procurer les caractères convenables à ce genre d'ouvrages, plusieurs exposants et plusieurs signes se trouvent un peu déplacés : mais il sera facile au lecteur de s'en apercevoir et d'y suppléer.

Fautes à corriger.

Page 52,	ligne 15e.	au lieu de $x = 0$.	lisez $v = 0$.	
56,	dern.	AP, AP ;	AP, AP′;	
57,	23e.	25	25°	
63,	dern.	*suvface*	*surface*	
Fig. 3e,	à droite de r,	*e*	*c*	
8e,	à gauche de x,	P	*p*	
9e,	audessus de P,	R	B	
12e,	au-dessus de i	*b*	*d.*	